



# Республиканская физическая олимпиада 2025 год (III этап)

## Теоретический тур

### *Решения задач 11 класс (для жюри)*

Уважаемые члены жюри!

Задачи, предложенные школьникам для решения на олимпиаде, не стандартные и достаточно сложные. Предложенные здесь варианты путей решений не являются единственно возможными. Участники олимпиады могут предложить свои способы решения. Если эти способы приводят к правильным ответам и физически обоснованы, то задача (или ее отдельные пункты) должны оцениваться максимальными баллами.

Каждое задание сопровождается Листами ответов, в которые участники олимпиады должны занести окончательные результаты.

Если окончательный результат не занесен в Лист ответов, но содержится в основном решении, то этот результат также необходимо оценивать.

Не забывайте, что Вы должны оценивать не только конечные ответы, но и отдельные правильные шаги в ходе решения!



***Уважаемые коллеги! Не жалейте баллов (если, конечно, есть за что!) для наших талантливых школьников!***

**Задание 11-1. «Разминка»**

**1. «Посмотри и объясни»** На Рис. 1 изображена известная физическая демонстрация. Проанализируйте Рис. 1, кратко опишите суть демонстрации и принцип действия изображенного устройства. Как называется данное устройство? Действие каких физических законов он демонстрирует?

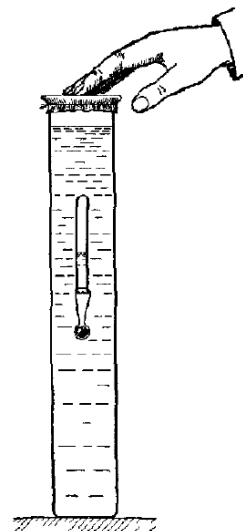


Рис. 1

**2. «Гравитационный маятник»** Однородный гладкий тонкий достаточно длинный стержень массой  $M$  и длиной  $L$  находится в невесомости в далеком космосе (Рис. 2). На стержень надета небольшая бусинка, масса  $m$  которой гораздо меньше массы  $M$  стержня ( $m \ll M$ ). Найдите период  $T$  малых колебаний бусинки вблизи центра стержня. Гравитационная постоянная  $G$ .

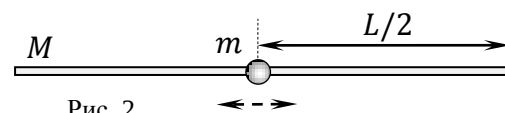


Рис. 2

**3. «Термодинамический лабиринт»** С идеальным одноатомным газом реализован незамкнутый термодинамический процесс ( $A \rightarrow B$ ), график которого изображен на  $p - V$  диаграмме (Рис. 3) в безразмерных координатах ( $V/V_0; p/p_0$ ). Найдите работу  $A$ , совершенную газом в течение данного процесса. Изменится ли ответ задачи, если газ будет не одноатомным? Не идеальным? Масштабные множители  $p_0$  и  $V_0$  считать известными. Количество вещества (идеального газа) в течение данного процесса было постоянно ( $\nu = \text{const}$ ).

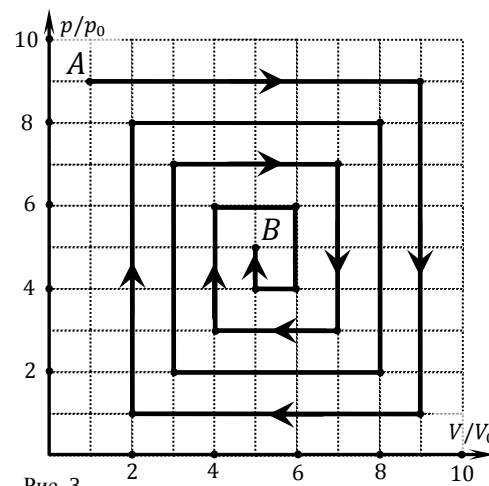


Рис. 3

Решение:

### Задание 11-1. «Разминка»

**1. «Посмотри и объясни»** На Рис. 1 изображена демонстрация работы *картезианского водолаза*. Он представляет собой плавающую в достаточно высоком сосуде пипетку (перевернутую пробирку) с небольшим грузом на нижнем конце. В пипетку (пробирку) частично заходит вода, при этом в пипетке остается «запертым» большой пузырь (столбик) воздуха.

Сосуд закрыт резиновой пленкой (упругой мембраной), на которую надавливает демонстратор.

При надавливании на пленку (мембрану) давление воздуха в сосуде увеличивается. По *закону Паскаля* это увеличение давления передается по всем направлениям в жидкости и «попадает» внутрь пробирки, где заперт столбик воздуха. При этом объем запертого в пипетке столбика воздуха уменьшается (*закон Бойля-Мариотта*).

По *закону Архимеда* при уменьшении объема воздуха (объема вытесненной воды) уменьшается и выталкивающая сила, действующая на пипетку.

Таким образом, в результате нажатия на мембрану пипетка начинает тонуть. Этот момент демонстрации и изображен на Рис. 1.

После отпускания мембраны, все процессы происходят в «обратном» порядке и картезианский водолаз благополучно всплывает.

Следовательно, данная демонстрация основана на действии *законов Паскаля, Архимеда и Бойля-Мариотта* и подтверждает их справедливость.

Перейдем к формулировкам отмеченных законов. В учебнике «Физика-7» на стр. 109 читаем закон Паскаля: *давление, производимое внешней силой на жидкость (газ), находящуюся в сосуде, передается жидкостью (газом) во все точки жидкости (газа) без изменения*.

В учебнике «Физика-9» на стр. 140 читаем закон Архимеда: *на тело, погруженное в жидкость (газ), действует выталкивающая сила, направленная вертикально вверх и равная весу жидкости (газа), вытесненной телом*.

В учебнике «Физика-10» на стр. 36 читаем закон Бойля-Мариотта: *давление данной массы газа при постоянных молярной массе и температуре обратно пропорционально его объему*.

**2. «Гравитационный маятник»** Поскольку, согласно условию, масса стержня  $M$  гораздо больше массы бусинки  $m$  ( $m \ll M$ ), то можно считать, что стержень практически неподвижен, а по нему движется бусинка.

В положении равновесия бусинка займет такое положение, при котором гравитационная сила, действующая на нее со стороны стержня, будет равна нулю. В силу симметрии ясно, что это положение будет соответствовать середине стержня, поскольку при этом справа и слева от бусинки будут находиться одинаковые массы и длины (половинки стержня).

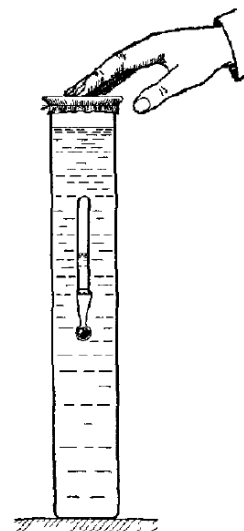


Рис. 1

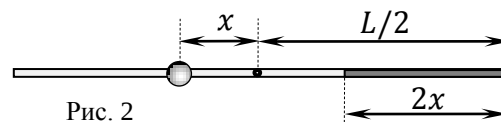


Рис. 2

Пусть в некоторый момент бусинка оказалась отклонена от положения равновесия на малое расстояние  $x$  (Рис. 2).

Мысленно разобьем стержень на две части: «белую» и «черную», имеющие различные длины (см. Рис. 2). Пусть черная часть (у левого конца стержня) имеет длину  $2x$  (на Рис. 2 сильно увеличено), тогда бусинка будет находиться по центру белой части длиной  $(L - 2x)$ .

Опять же в силу симметрии, равнодействующая гравитационных сил, действующих на бусинку со стороны «белой» части стержня, равна нулю (она посередине!).

Следовательно, возвращает бусинку назад (к положению равновесия) только сила гравитационного притяжения со стороны черного кусочка малой длиной  $2x$ . Масса этого «черного» кусочка стержня

$$M^* = \lambda(2x), \quad (1)$$

где  $\lambda = \frac{M}{L}$  – линейная плотность стержня.

Считая черный кусочек стержня материальной точкой (стержень достаточно длинный) на краю стержня найдем силу притяжения по закону гравитации Ньютона

$$F(x) = -G \frac{mM^*}{(L/2)^2}. \quad (2)$$

Тогда второй закон Ньютона (уравнение гармонических колебаний) для движения бусинки примет вид

$$ma = m\ddot{x}(t) = F(x) = -\left(G \frac{8mM}{L^3}\right)x. \quad (3)$$

Переписывая (3) в стандартном виде для гармонических колебаний, получим

$$\ddot{x}(t) + \left(G \frac{8M}{L^3}\right)x(t) = 0. \quad (4)$$

Выражение (4) описывает гармонические колебания ( $\omega = \sqrt{\frac{8GM}{L^3}}$ ) с периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L^3}{8GM}} = \pi\sqrt{\frac{L^3}{2GM}} = \pi L\sqrt{\frac{L}{2GM}}. \quad (5)$$

**3. «Термодинамический лабиринт»** Данный процесс представляет собой совокупность изобар ( $p = \text{const}$ ) и изохор ( $V = \text{const}$ ), образующих «лабиринт».

Поскольку при изохорном процессе газ работы не совершает ( $\Delta V = 0$ ), то для решения задачи достаточно рассмотреть только изобарные (горизонтальные) участки лабиринта, выделенные на рисунке.

Напомним, что при расширении газа (участки  $AC$ ,  $FG$ ,  $JK$ ,  $NO$ ) его работа положительна ( $\Delta V > 0$ ), а при сжатии ( $DE$ ,  $HI$ ,  $LM$ ,  $PQ$ ) – отрицательна ( $\Delta V < 0$ ).

Следовательно, в данном случае для полной работы газа получим равенство

$$A = p_0 V_0 ((9 \cdot 8 - 7 \cdot 1) + (8 \cdot 6 - 2 \cdot 5) + (7 \cdot 4 - 3 \cdot 3) + (6 \cdot 2 - 4 \cdot 1)) = 130 p_0 V_0. \quad (1)$$

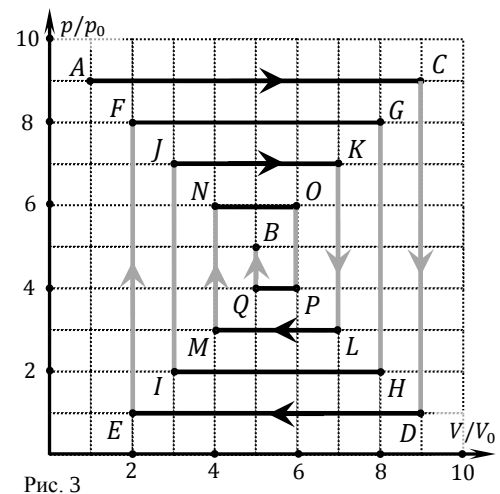


Рис. 3

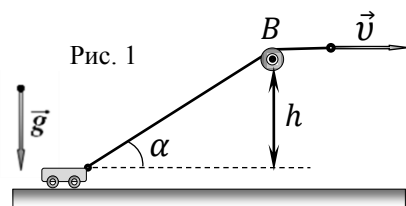
Поскольку при решении мы нигде не использовали формулу для внутренней энергии идеального одноатомного газа ( $U = \frac{3}{2} \nu RT$ ), то ответ (1) не изменится и в случае многоатомного газа.

Если газ будет реальным (не идеальным), то его работа ( $A = \oint p(V) dV$ ) все равно будет равна площади фигуры на  $p - V$  диаграмме, следовательно, ответ (1) также не изменится.

Таким образом, словосочетание «идеальный одноатомный» можно спокойно «убрать» из условия для данной задачи.

**Задание 11-2. Ускорение. Сила. Мощность**

1. Небольшую тележку (Рис. 1) массой  $m = 0,35$  кг подтягивают легкой нерастяжимой нитью к неподвижному блоку  $B$  по горизонтальной поверхности. Известно, что механизм (например, лебёдка) вытягивает нить с постоянной скоростью  $v$ . Найдите ускорение  $a$  тележки в момент, когда нить образует угол  $\alpha$  с горизонтом (см. Рис. 1). Блок расположен на высоте  $h$  от горизонтальной поверхности. Известно, что при движении тележка не отрывается от горизонтальной поверхности.



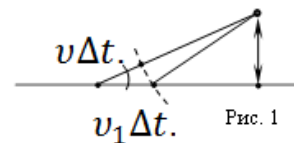
2. Найдите силу натяжения  $T$  нити в данный момент. Трением и сопротивлением воздуха можно пренебречь.
3. Найдите мощность  $P$ , развиваемую лебедкой в данный момент.
4. Вычислите по полученным формулам ускорение  $a$ , силу  $T$ , мощность  $P$  при следующих значениях параметров системы:  $\alpha = 35^\circ$ ,  $h = 1,0$  м,  $v = 1,5 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ .

5.

Решение:

1. Для нахождения мгновенной скорости тележки  $u(\alpha)$  используем метод малых перемещений.

Пусть за малый промежуток времени  $\Delta t$  тележка сместится вправо по горизонтали на расстояние  $u\Delta t$ . При этом длина нити уменьшится на величину  $v\Delta t$ . Из соответствующего прямоугольного треугольника получаем (на Рис.  $u = v_1$ )



$$v\Delta t = u\Delta t \cos \alpha. \quad (1)$$

Из (1) находим зависимость скорости  $u$  тележки от угла  $\alpha$

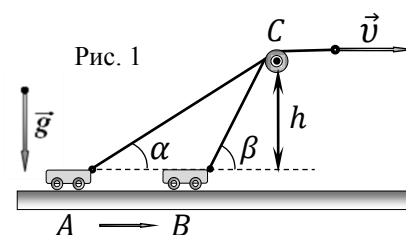
$$u(\alpha) = \frac{v}{\cos \alpha}. \quad (2)$$

Поскольку ускорение есть производная от скорости по времени, продифференцируем (2) по времени, как сложную функцию, учитывая, что угол  $\alpha$  тоже зависит от времени

$$\alpha = \alpha(t) \Rightarrow \alpha'(t) = \frac{d\alpha}{dt} = \omega. \quad (3)$$

По правилам дифференцирования сложной функции получим

$$a = u'(\alpha) = \left( \frac{v}{\cos \alpha} \right)' = -v \frac{(-\sin \alpha)}{(\cos \alpha)^2} \cdot \alpha'(t) = \frac{v \sin \alpha}{(\cos \alpha)^2} \cdot \omega, \quad (4)$$



где  $\omega$  – угловая скорость вращения нити в данный момент времени.

Угловую скорость  $\omega$  несложно найти, раскладывая скорость тележки на нормальную  $u_{\perp}$  (перпендикулярно нити) и тангенциальную  $u_{\parallel}$  (вдоль нити) компоненты

$$\omega = \frac{u_{\perp}}{CB} = \frac{u \sin \alpha}{h / \sin \alpha} = \frac{v (\sin \alpha)^2}{h \cos \alpha}. \quad (5)$$

Подставляя (5) в (4), получаем ускорение тележки

$$a = \frac{v \sin \alpha}{(\cos \alpha)^2} \cdot \omega = \frac{v \sin \alpha}{(\cos \alpha)^2} \cdot \frac{v (\sin \alpha)^2}{h \cos \alpha} = \frac{v^2}{h} (\tan \alpha)^3, \quad (6)$$

Расчет дает

$$a = \frac{v^2}{h} (\tan \alpha)^3 = \frac{1,5^2}{1,0} (\tan 35^\circ)^3 \text{ м/с}^2 = \{0,7724366362\} = 0,77 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}, \quad (7)$$

Заметим, что (7) с необходимым количеством значащих цифр можно получить и без производных, используя метод, изложенный в задаче 9-2 «Среднее ускорение». Однако с использованием производных решение выходит гораздо короче.

2. Тележку разгоняет только проекция силы натяжения нити (трения нет), поэтому второй закон Ньютона примет вид

$$ma = m \frac{v^2}{h} (\tan \alpha)^3 = T \cos \alpha. \quad (8)$$

Из (8) найдем

$$T = m \frac{v^2 (\tan \alpha)^3}{h \cos \alpha}. \quad (9)$$

Расчет дает

$$T = 0,35 \frac{1,5^2 (\tan 35^\circ)^3}{1,0 \cos 35^\circ} = \{0,3300398559\} = 0,33 \text{ Н}. \quad (10)$$

3. Мощность силы можно посчитать по известной формуле для горизонтального участка нити

$$P = Tv = m \frac{v^3}{h} \frac{(\tan \alpha)^3}{\cos \alpha}. \quad (11)$$

Расчет дает

$$T = 0,35 \frac{1,5^3}{1,0} \frac{(\tan 35^\circ)^3}{\cos 35^\circ} = \{0,4950597839\} = 0,50 \text{ Н}. \quad (12)$$

Заметим, что (10) и (12) с необходимым количеством значащих цифр можно получить и без производных, используя метод, изложенный в задаче 10-2 «Средняя мощность». Однако с использованием производных решение выходит гораздо короче.

### 11-3. «Вокруг диполя»

В электродинамике часто используется модель *диполя* (Рис. 1), представляющая собой два близко расположенных одинаковых по модулю точечных заряда разных знаков.

В качестве реальной модели диполя рассмотрим небольшие заряженные шарики, закрепленные на тонком непроводящем стержне. Электрические заряды шариков равны по модулю и противоположны по знаку (см. Рис. 1), т.е. равны  $-q$  и  $+q$ , соответственно, где  $(q > 0)$ .

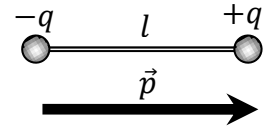


Рис. 1

Будем считать, что заряженные шарики закреплены на жестком стержне длины  $l$ , а все свойства диполя рассматриваются на достаточно больших расстояниях  $r$  ( $r \gg l$ ) от его центра.

Диполь принято характеризовать вектором *дипольного момента*  $\vec{p} = q\vec{l}$ , величина которого равна  $ql$ , а направление выбирается вдоль оси диполя от его отрицательного заряда к положительному (см. Рис. 1).

Несмотря на то, что суммарный заряд диполя равен нулю, он создает в пространстве вокруг себя отличное от нуля электростатическое поле, которое несложно посчитать школьными методами.

В данной задаче рассмотрим возможность движения заряженной частицы вокруг диполя по окружности.

*Справочные данные и параметры рассматриваемой системы:* скалярное произведение векторов:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha = ab \cos \alpha$ , где  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ ; при малых  $x$  ( $x \rightarrow 0$ ) справедливо приближенное равенство:  $\frac{1}{1-x} \approx 1 + x$ ;  $\pi = 3,14$ .

#### Часть 1. Поле диполя

Рассмотрим электрический диполь  $AB$  (Рис. 2), ориентированный вдоль оси ординат  $Oy$  так, что в точке начала координат  $A$  расположен заряд  $(-q)$ , а в точке  $B$  – заряд  $(+q)$ , соответственно ( $q > 0$ ). Расстояние  $AB = l$ , соответственно, дипольный момент системы  $\vec{p} = q\vec{l}$ .

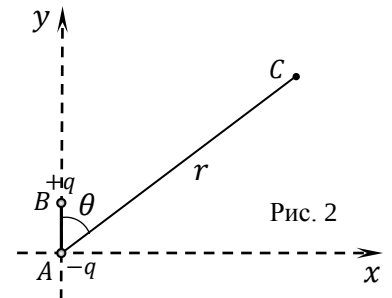


Рис. 2

Перейдем в полярную систему координат, в которой положение произвольной точки  $C(r, \theta)$  в плоскости рисунка (см. Рис. 2) задается расстоянием  $r$  от начала координат и углом  $\theta$ , образованным отрезком  $AC$  с осью ординат  $Oy$ . Рассмотрим электростатическое поле диполя  $AB$  в вакууме.

**1.1** Найдите потенциал  $\varphi(r, \theta)$  электростатического поля диполя в произвольной точке  $C$  на достаточно большом удалении от него ( $r \gg l$ ). Запишите полученное выражение через скалярное произведение векторов  $\vec{p}$  и  $\vec{r}$ .

**1.2** Разложим напряженность  $\vec{E}$  (Рис. 3) поля диполя в точке  $C$  на сумму  $\vec{E} = \vec{E}_r + \vec{E}_\theta$  двух взаимно перпендикулярных составляющих  $\vec{E}_r$  и  $\vec{E}_\theta$ , так, чтобы вектор  $\vec{E}_r$  был направлен вдоль отрезка  $AC = r$ , а вектор  $\vec{E}_\theta$  был нормален ему. Определите зависимость  $E_r(r, \theta)$  радиальной составляющей поля диполя в точке  $C$ .

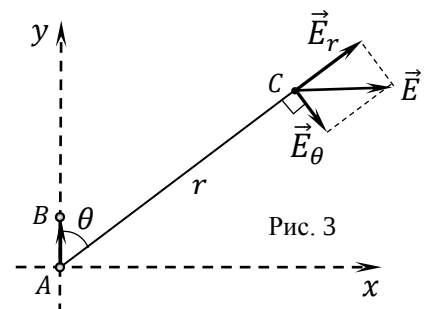


Рис. 3

**1.3** Найдите зависимость  $E_\theta(r, \theta)$  угловой составляющей поля диполя в точке  $C$ .

1.4 Получите формулу для модуля напряженности  $E(r, \theta)$  поля диполя в точке  $C$ .

1.5 Докажите векторную формулу для напряженности  $\vec{E}(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right)$  поля диполя с моментом  $\vec{p}$  в произвольной точке с радиус-вектором  $\vec{r}$ .

## Часть 2. Движение вокруг диполя

Частицу массой  $m$  с положительным зарядом  $q^*$  удерживают в точке  $A$  на оси  $Ox$  на расстоянии  $r$  от центра закрепленного диполя, рассмотренного выше (Рис. 4).

В некоторый момент времени частицу отпускают и она начинает двигаться под действием электростатического поля диполя  $\vec{E}(\vec{r})$ .

Силой тяжести и силой сопротивления воздуха пренебречь.

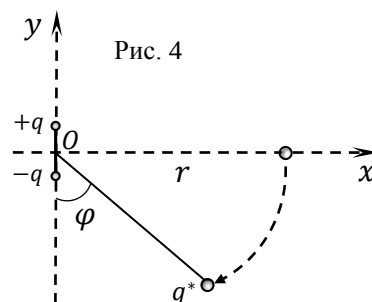


Рис. 4

2.1 По какой траектории будет двигаться частица? Обоснуйте свое предположение и подтвердите его расчетами, выкладками, формулами.

2.2 Найдите зависимость скорости частицы  $v(\varphi)$  от угла  $\varphi$  между радиусом и осью  $Ox$  (см. Рис. 4).

2.3 Определите максимальную скорость  $v_{max}$  частицы при движении в поле диполя.

2.4 Определите максимальное ускорение  $a_{max}$  частицы при движении в поле диполя.

Возможные решения:

**Часть 1. Поле диполя**

**1.1** Обозначим расстояния от зарядов  $(+q)$  и  $(-q)$  до точки  $C$  через  $BC = r_1$  и  $AC = r = r_2$ , соответственно (Рис. 1).

Изобразим диполь на рисунке более крупно, чтобы из геометрических построений заметить, что при больших расстояниях ( $r \gg l$ ) длина дуги  $BD$  близка к длине катета  $BD$

$$r_1 = r_2 - AD \approx r_2 - l \cos \theta. \quad (1)$$

Согласно принципу суперпозиции потенциалов электростатических полей искомый потенциал точки  $C$  можем записать как сумму потенциалов двух точечных зарядов

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-q)}{r_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \right). \quad (2)$$

Из (2) и (1) получим потенциал диполя на значительном расстоянии ( $r_1 \approx r$ )

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \right) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{l \cos \theta}{r_1 r_2} \right) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{l \cos \theta}{r^2}. \quad (3)$$

Следовательно, в пределе искомое выражение для потенциала  $\varphi(r, \theta)$  электростатического поля диполя примет вид

$$\varphi(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{l \cos \theta}{r^2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^2}, \quad (4)$$

Где  $p = ql$  – дипольный момент системы.

Интересно, что, согласно (4), потенциал электростатического поля диполя убывает с расстоянием ( $\sim \frac{1}{r^2}$ ) быстрее, чем потенциал поля точечного заряда ( $\sim \frac{1}{r}$ ).

Если использовать математическую подсказку и рассмотреть скалярное произведение векторов

$$\vec{p} \cdot \vec{r} = pr \cos \theta \Rightarrow p \cos \theta = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r}, \quad (5)$$

то выражение для потенциала (4) можно переписать в «векторном» (достаточно удобном для запоминания) виде для произвольной точки пространства с радиус-вектором  $\vec{r}$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}. \quad (6)$$

**1.2** Согласно принципу суперпозиции электрических полей напряженность  $\vec{E}$  поля диполя в точке  $C$  может быть представлена различными способами

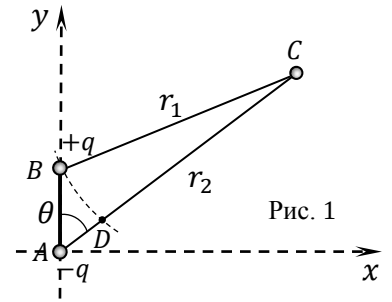
$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-. \quad (7)$$

Векторы  $\vec{E}_+$  и  $\vec{E}_-$  от зарядов  $(+q)$  и  $(-q)$  образуют практически развернутый угол ( $180^\circ$ ), поскольку при  $l \ll r$  угол  $\widehat{ACB}$  мал, и оба эти вектора ориентированы практически вдоль отрезка  $AC$ . Но вектор  $\vec{E}_+$  «немного длиннее», поэтому модуль радиальной составляющей  $E_r$  равен разности их модулей

$$E_r = E_+ - E_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(r-AD)^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{(r-l \cos \theta)^2} - \frac{1}{r^2} \right). \quad (8)$$

Раскрывая скобки, преобразуем (8) к виду, пренебрегая бесконечно малым слагаемым ( $l^2 (\cos \theta)^2$ ) более высокого порядка, т.к. ( $r \gg l$ )

$$E_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r^2 - 2rl \cos \theta + l^2 (\cos \theta)^2} - \frac{1}{r^2} \right) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r^2 - 2rl \cos \theta} - \frac{1}{r^2} \right). \quad (9)$$



Далее используем математическую подсказку

$$\frac{1}{r^2 - 2rl \cos \theta} = \frac{1}{r^2} \left( \frac{1}{1 - \frac{2l \cos \theta}{r}} \right) \approx \frac{1}{r^2} \left( 1 + \frac{2l \cos \theta}{r} \right), \quad (10)$$

тогда (9) примет вид

$$E_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r^2} \left( 1 + \frac{2l \cos \theta}{r} \right) - \frac{1}{r^2} \right) = \frac{2ql \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{r^3} \cos \theta. \quad (11)$$

Из (11) следует, что по мере увеличения угла  $\theta$  величина  $E_r$  убывает, и при  $\theta = \frac{\pi}{2}$  (т.е. на оси  $Ox$ ) становится равной нулю. Далее ( $\theta > \frac{\pi}{2}$ ) (11) принимает отрицательные значения, т.е. напряженность поля поменяет свое направление (к диполю).

**1.3** Для нахождения угловой составляющей  $E_\theta(r, \theta)$  поля диполя запишем для малого угла  $\widehat{ACB}$  равенство

$$\widehat{ACB} = \frac{BD}{r} = \frac{l \sin \theta}{r}. \quad (12)$$

Соответственно, для малых углов длину хорды в векторном треугольнике (7) также можно заменить на длину дуги, т.е.

$$E_\theta = E_- \cdot \widehat{ACB} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \cdot \frac{l \sin \theta}{r} = \frac{ql \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} \sin \theta. \quad (13)$$

Заметим, что (11) и (13) можно получить быстрее, взяв производные (со знаком «минус») от потенциала (4) по соответствующим направлениям.

**1.4** По теореме Пифагора получим для модуля напряженности диполя

$$E(r, \theta) = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \frac{ql}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{1 + 3(\cos \theta)^2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{1 + 3(\cos \theta)^2}. \quad (14)$$

**1.5** Для доказательства приведенной в условии формулы введем взаимно перпендикулярные единичные векторы  $\vec{a}_r = \frac{\vec{r}}{r}$  и  $\vec{a}_\theta$ , направленные вдоль отрезка  $AC$  и перпендикулярно ему.

С учетом (5) перепишем (11) в векторном виде, не привязанном к какой-либо системе координат. Тогда получим

$$\vec{E}_r = E_r \cdot \vec{a}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{r^3} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r} \vec{a}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{r^3} \frac{(\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{2(\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^5} \right). \quad (15)$$

Поступая аналогично с (13), следует выразить  $\vec{a}_\theta$  как разность уже известных векторов прямоугольного треугольника на Рис. 3

$$\vec{E}_\theta = -E_\theta \cdot \vec{a}_\theta = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \left( \vec{p} - \frac{(\vec{p} \cdot \vec{r})}{r^2} \vec{r} \right). \quad (16)$$

Тогда вектор напряженности поля диполя будет равен

$$\vec{E} = \vec{E}_r + \vec{E}_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right). \quad (17)$$

Объединяя (15) и (16), получаем искомое векторное выражения для поля диполя в произвольной точке пространства

$$\vec{E}(\vec{r}, \vec{p}) = \vec{E}_r + \vec{E}_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{2(\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^5} \right) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \left( \vec{p} - \frac{(\vec{p} \cdot \vec{r})}{r^2} \vec{r} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right). \quad (18)$$

## Часть 2. Движение вокруг диполя

**2.1** В точке старта  $A$  на частицу  $q^*$  будет действовать угловая составляющая  $E_\theta$  напряженности электрического поля диполя, которая сдвинет его с места и начнет разгонять.

В свою очередь, радиальная составляющая  $E_r$  поля, направленная в начало координат, начнет поворачивать вектор скорости частицы. Вследствие этого, траектория частицы уже не будет прямой, а будет представлять собой некую кривую.

Предположим, что эта кривая будет дугой окружности радиуса  $r$ , центр которой находится в центре диполя (начале координат).

Обоснуем наше предположение. Рассмотрим заряд  $q^*$  в момент, когда радиус  $r$  составляет с осью  $Oy$  угол  $\varphi$  (Рис. 2).

Поскольку в этой части задачи удобнее использовать другой угол, то для использования ранее полученных выражений следует учесть, что

$$\varphi = \pi - \theta \quad \Rightarrow \quad \theta = \pi - \varphi \quad . \quad (19)$$

Для движения по окружности радиуса  $r$  необходимо выполнение второго закона Ньютона в проекции на радиальное направление (чтобы сила диполя смогла сообщить шарикку необходимое центростремительное ускорение). С учетом (11) это условие примет вид

$$ma_r = \frac{mv^2}{r} = q^* E_r = q^* \left( \frac{2ql \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right) = \frac{q^* ql \cos \varphi}{2\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (20)$$

Выражая из (20) зависимость скорости от угла, получим

$$v(\varphi) = \sqrt{\frac{q^* ql \cos \varphi}{2\pi\epsilon_0 mr^2}}. \quad (21)$$

Таким образом, для движения частицы по дуге окружности необходимо и достаточно, чтобы её скорость возрастала при уменьшении угла  $\varphi$  по закону (21).

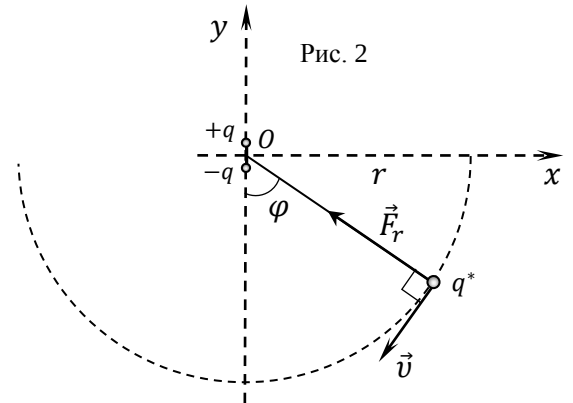
С другой стороны, изменить модуль скорости частицы может только угловая составляющая электрического поля  $E_\theta$ . Согласно закону сохранения энергии с учетом (4) для этого процесса получим

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{q^* q}{4\pi\epsilon_0} \frac{l \cos \varphi}{r^2} = 0. \quad (22)$$

Из (22) найдем скорость частицы при угле  $\varphi$

$$v(\varphi) = \sqrt{\frac{q^* ql \cos \varphi}{2\pi\epsilon_0 mr^2}}. \quad (23)$$

Удивительным образом выражения (23) и (21) для скорости частицы совпали. Это значит, что электростатическое поле диполя само, «автоматически» будет разгонять и поворачивать частицу, обеспечивая ей при любом угле  $\varphi$  (т.е. в любой момент времени) возможность движения по окружности радиуса  $r$ .



**2.2** Как следует из предыдущего пункта решения, искомую зависимость  $v(\varphi)$  можно находить двумя способами: как из второго закона Ньютона, так и из закона сохранения энергии. Естественно, оба способа приводят к одному и тому же результату

$$v(\varphi) = \sqrt{\frac{q^*ql \cos \varphi}{2\pi\epsilon_0mr^2}}. \quad (24)$$

**2.3** Из (24) следует, что максимальная скорость  $v_{max}$  частицы достигается при пересечении ею оси  $Oy$ , т.е. при  $\varphi = 0$

$$v_{max} = \sqrt{\frac{q^*ql}{2\pi\epsilon_0mr^2}}. \quad (25)$$

Далее движение частицы будет замедляться, она остановится в точке симметричной точке старта и пойдет «назад», т.е. в системе возникнут негармонические колебания большой амплитуды.

**2.4** Максимальное ускорение  $a_{max}$  найдем, используя (20). Как видим, это опять же происходит при  $\varphi = 0$ . При этом ускорение определяется только радиальной составляющей поля диполя (тангенциальное ускорение исчезает), следовательно

$$a_{max} = a_r = \frac{v^2}{r} = \frac{q^*E_{max}}{m} = \frac{q^*ql}{2\pi\epsilon_0mr^3}. \quad (26)$$