



Республиканская физическая олимпиада 2025 год (III этап)

Теоретический тур

Решения задач 10 класс (для жюри)

Уважаемые члены жюри!

Задачи, предложенные школьникам для решения на олимпиаде, не стандартные и достаточно сложные. Предложенные здесь варианты путей решений не являются единственно возможными. Участники олимпиады могут предложить свои способы решения. Если эти способы приводят к правильным ответам и физически обоснованы, то задача (или ее отдельные пункты) должны оцениваться максимальными баллами.

Каждое задание сопровождается Листами ответов, в которые участники олимпиады должны занести окончательные результаты.

Если окончательный результат не занесен в Лист ответов, но содержится в основном решении, то этот результат также необходимо оценивать.

Не забывайте, что Вы должны оценивать не только конечные ответы, но и отдельные правильные шаги в ходе решения!



***Не жалейте баллов (если, конечно, есть за что!) для наших
талантливых школьников!***

Задание 10-1. Прогрессивная динамика

В данном задании действие силы тяжести не учитывать. Внимание! Рисунки носят качественный характер: реальные пропорции сил на них по понятным причинам не соблюдены.

1.1 На материальную точку массой $m = 36,4$ кг действуют шесть сил (Рис. 1), расположенных в одной плоскости, самая «маленькая» из которых равна $F_1 = 10$ Н и направлена вдоль оси Ox . Известно, что каждая следующая сила больше предыдущей в два раза и повернута на угол $\alpha = 60^\circ$ (см. Рис. 1). Найдите ускорение $\vec{a}_1$ материальной точки под действием данной системы сил.

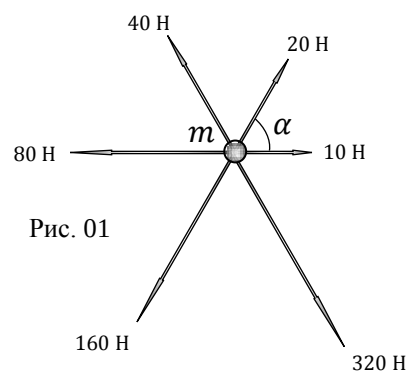


Рис. 01

1.2 Рассмотрим общий случай. Пусть на материальную точку массой m (Рис. 2) действует система из n сил ($\vec{F}_1; \vec{F}_2; \vec{F}_3; \dots; \vec{F}_{n-1}; \vec{F}_n$), расположенных в одной плоскости на одинаковом угловом расстоянии $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ друг от друга. Известно, что модуль F_{i+1} каждой следующей силы в k раз больше модуля F_i предыдущей. Найдите ускорение $\vec{a}_2$ материальной точки под действием описанной системы сил.

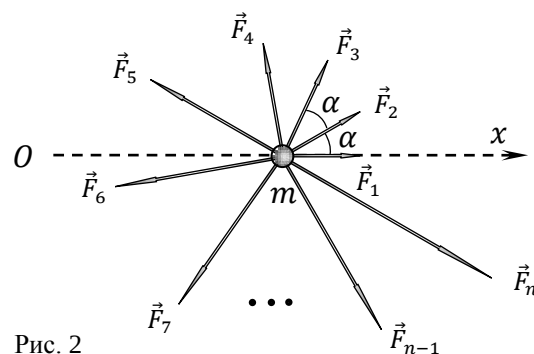


Рис. 2

1.3 Используя общее выражение, полученное для $\vec{a}_2$ в предыдущем пункте, вычислите ускорение $\vec{a}_1$ для первого пункта задачи.

Решение:

Задание 10-1. Прогрессивная динамика

1.1 Прямой метод решения предполагает нахождение проекции каждой из шести сил на соответствующую ось и дальнейшее суммирование проекций по каждой из осей.

Однако задачу можно решить проще (и короче!) если попарно сложить силы, противоположные по направлению.

Это упрощает систему до трех сил различной длины (Рис. 01), которые можно последовательно просуммировать по правилу параллелограмма.

После сложения сил 70 Н и 140 Н по теореме косинусов (Рис. 02) имеем

$$F_{12} = \sqrt{70^2 + 140^2 - 2 \cdot 70 \cdot 140 \cdot \cos 120^\circ} = \{185,2025918\}^1 = 185 \text{ Н}. \quad (1)$$

Для дальнейших вычислений нам потребуется угол β между вектором $\vec{F}_{12}$ и силой 140 Н (см. Рис. 02), который найдем по теореме синусов

$$\frac{70 \text{ Н}}{\sin \beta} = \frac{185 \text{ Н}}{\sin 120^\circ} \Rightarrow \beta = 19,1^\circ. \quad (2)$$

Далее аналогично (по правилу параллелограмма) складываем силы $\vec{F}_{12}$ и 280 Н, учитывая, что

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 101^\circ. \quad (3)$$

Опять же по теореме косинусов

$$F = \sqrt{185^2 + 280^2 - 2 \cdot 185 \cdot 280 \cdot \cos 101^\circ} = \{363,8582305\} = 364 \text{ Н}. \quad (4)$$

Для полного задания вектора необходимо не только найти его модуль (4), но и указать направление на плоскости. На практике для этого достаточно найти угол, образуемый данным вектором с какой либо осью или отрезком.

В нашем случае удобно найти угол φ (см. Рис. 02), образованный вектором равнодействующей $\vec{F}$ с осью Ox

$$\varphi = \alpha + \delta. \quad (5)$$

По теореме синусов для треугольника из второго параллелограмма имеем

$$\frac{185 \text{ Н}}{\sin \delta} = \frac{364 \text{ Н}}{\sin 101^\circ} \Rightarrow \delta = 29,9^\circ, \quad (6)$$

тогда

$$\varphi = 60^\circ + 29,9^\circ = 89,9^\circ = 90^\circ. \quad (7)$$

Как следует из (7) вектор равнодействующей $\vec{F}$ практически перпендикулярен оси Ox , следовательно, согласно второму закону Ньютона, ускорение $\vec{a}_1$ материальной точки также будет практически перпендикулярно этой оси.

Заметим, что на Рис. 02 угол φ тупой, тогда как точные вычисления показывают, что он «немножечко острый». Тем не менее, даже такой «качественный» рисунок привел нас к цели.

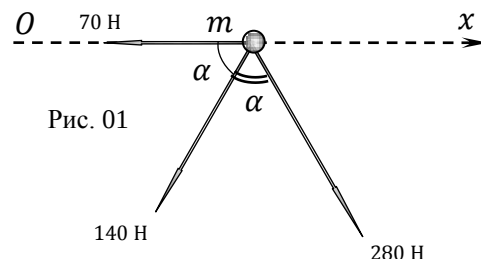


Рис. 01

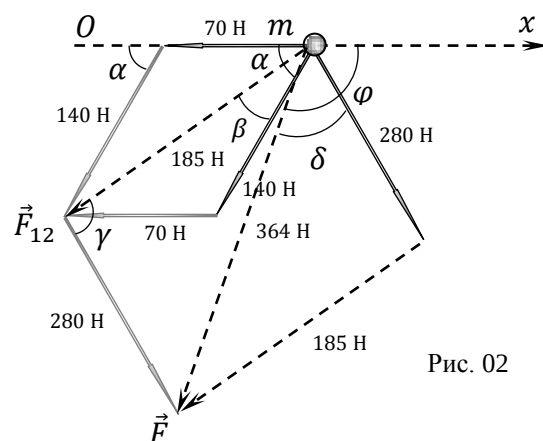


Рис. 02

¹ — здесь и далее: в фигурных скобках представлены (без размерности!) показания инженерного калькулятора (например, CASIO fx-991EX (CLASSWIZ)) при правильном расчёте.

Из основного закона динамики находим модуль a_1 ускорения материальной точки

$$a_1 = \frac{F}{m} = \frac{364}{36.4} \left(\frac{\text{M}}{\text{c}^2} \right) = 10 \left(\frac{\text{M}}{\text{c}^2} \right). \quad (8)$$

Интересно, что значение (8) для a_1 совершенно случайно «совпало» со значением g , используемом на централизованном тестировании (☺), хотя в этом задании мы его не учитывали

$$a_1 = g_{\text{цт}} = 10 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \right).$$

1.2 По определению равнодействующая $\vec{F}$ равна сумме всех сил, действующих на материальную точку

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_{n-1} + \vec{F}_n \quad (9)$$

Заметим, что модули сил, действующих на материальную точку, образуют возрастающую геометрическую прогрессию. Следовательно, для модуля силы F_n справедлива формула

$$F_n = F_1 \cdot k^{n-1}. \quad (10)$$

Кроме того, при геометрической прогрессии для любых соседних членов F_{i+1} и F_i выполняется равенство

$$\frac{F_{i+1}}{F_i} = k = \text{const.} \quad (11)$$

Для практического использования свойства (11) на векторной диаграмме (Рис. 02). умножим каждый вектор $\vec{F}_i$ на k (при этом он удлинится в k раз) и повернём «удлиненную» систему сил как целое на угол $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ против часовой стрелки (См. Рис. 02).

Из (11) следует, что после такой процедуры вектор $\vec{F}_1$ «превратился» в $\vec{F}_2$ и в точности «занял его место». Соответственно, вектор $\vec{F}_2$ «превратился» в $\vec{F}_3$ и в точности «занял его место» и т.д. Только последний вектор $\vec{F}_n$ «удлинился» в k раз и занял место «ушедшего» при повороте первого вектора $\vec{F}_1$. Соответственно, можно считать, что к старой системе сил после такой процедуры просто добавился вектор $kF_n - F_1$, ориентированный вдоль оси Ox .

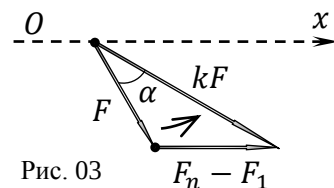


Рис. 03

Но, с другой стороны, из (9) следует, что результирующая сила $\vec{F}$ при этом увеличилась в k раз и также повернулась на угол $\alpha = \frac{2\pi}{n}$.

Изобразим все сказанное на векторной диаграмме (Рис. 03), образующей векторный треугольник.

Согласно теореме косинусов для треугольника можем записать

$$(kF_n - F_1)^2 = F^2 + (kF)^2 - 2F \cdot kF \cdot \cos \alpha. \quad (12)$$

С учетом (10) преобразуем (12) к виду

$$F_1^2(k^n - 1)^2 = F^2 + (kF)^2 - 2F \cdot kF \cdot \cos \alpha, \quad (13)$$

откуда находим

$$F = \frac{k^{n-1}}{\sqrt{k^2 - 2k \cos \alpha + 1}} F_1 = \frac{k^{n-1}}{\sqrt{k^2 - 2k \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + 1}} F_1. \quad (14)$$

Для задания направления вектора $\vec{F}$ на плоскости найдем угол β из теоремы синусов

$$\frac{F_1(k^{n-1})}{\sin \alpha} = \frac{F}{\sin \beta} \Rightarrow \sin \beta = \frac{F \sin \alpha}{F_1(k^{n-1})} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{k^2 - 2k \cos \alpha + 1}}. \quad (15)$$

Тогда вектор $\vec{F}$ образует с осью Ox угол

$$\gamma = \alpha + \beta = \frac{2\pi}{n} + \beta. \quad (16)$$

Выражения (14) – (16) полностью задают равнодействующую силу $\vec{F}$ для данной системы сил.

Согласно второму закону Ньютона ускорение материальной точки будет также направлено под углом γ к оси Ox и равно

$$a_2 = \frac{F}{m} = \frac{k^{n-1}}{\sqrt{k^2 - 2k \cos(\frac{2\pi}{n}) + 1}} \frac{F_1}{m}. \quad (17)$$

1.3 Для вычислений с использованием (14) – (16) из условия задачи найдем необходимые параметры: $n = 6$; $k = 2$. После подстановки получаем

$$a_1 = \frac{2^6 - 1}{\sqrt{2^2 - 2 \cdot 2 \cos(\frac{2\pi}{6}) + 1}} \frac{10}{36,4} \left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \right) = \{9,992600813\} = 10 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \right), \quad (18)$$

$$\beta = \sin^{-1} \left(\frac{\sin 60^\circ}{\sqrt{2^2 - 2 \cdot 2 \cos(\frac{2\pi}{6}) + 1}} \right) = \frac{\pi}{6} = 30^\circ. \quad (19)$$

Следовательно,

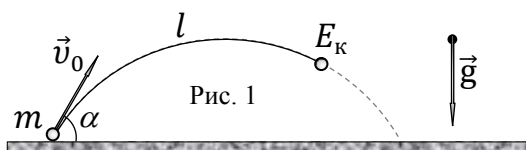
$$\gamma = \frac{2\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} = 90^\circ. \quad (20)$$

Согласно (20) вектор $\vec{a}_2$ перпендикулярен оси Ox .

Сравнивая (18) и (20) с (7) и (8) констатируем полное совпадение ответов (с учетом малых погрешностей округления) и в очередной раз убеждаемся в справедливости старой истины: «Все правильные решения, в отличие от неправильных, ведут к одному и тому же ответу»! ☺

Задание 10-2. Энергичный бросок

Небольшой камешек массой m бросили под некоторым углом α к горизонтальной поверхности (Рис. 1) с некоторой начальной скоростью $\vec{v}_0$. Зависимость кинетической энергии E_k камешка (см. Рис. 1) от пройденного им пути l в процессе полёта представлена на Рис. 2 в безразмерных координатах E_k/E_0 и l/l_0 (где E_0 и l_0 – некоторые размерные масштабные множители).



Сопротивлением воздуха при движении камешка пренебречь. Ускорение свободного падения g .

Часть 1. «Только формулы» В этой части задачи Вам предстоит самое простое: вывести формулы для различных физических параметров системы через известные величины: m , E_0 , g .

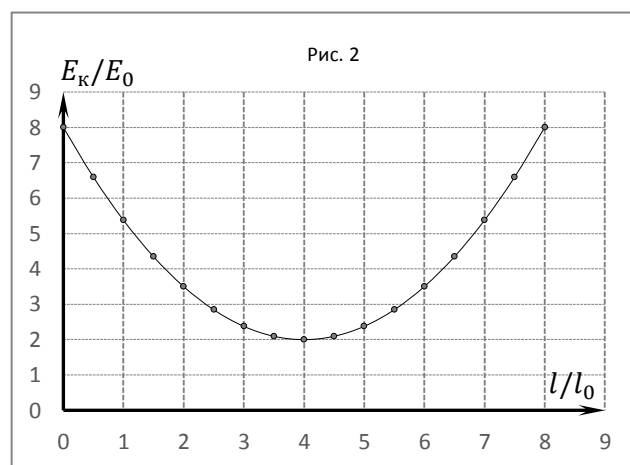
1.1 Найдите кинетические энергии камешка: E_1 – в момент бросания, E_2 – в верхней точке траектории, E_3 – при падении на землю.

1.2 Определите начальную скорость v_0 камешка при броске.

1.3 Получите формулу для определения угла α , под которым камешек бросили к горизонту.

1.4 Выведите формулу для времени полета t_n камешка.

1.5 Найдите максимальную высоту h_{max} и дальность S полета камешка при таком броске.



Часть 2. «Только расчёты» В этой части задачи Вам предстоит самое сложное – вычислить значения физических параметров системы по формулам, полученным в первой части. При расчетах примите: $m = 1,00$ кг, $E_0 = 10,0$ Дж, $g = 9,81$ м/с².

2.1 Вычислите значения всех физических параметров системы из пунктов 1.1 – 1.4.

2.2 Вычислите максимальную высоту h_{max} и дальность S полета камешка из пункта 1.5. Получите численное уравнение $y(x)$ траектории камешка, схематически её постройте. Как можно точнее оцените длину траектории l_{max} камешка.

2.3 Определите численное значение размерного масштабного множителя l_0 .

Решение:

Часть 1. «Только формулы»

1.1 В момент бросания путь, пройденный камешком, равен нулю ($l/l_0 = 0$), что соответствует начальной точке A графика (Рис 10). Следовательно

$$E_1 = 8E_0. \quad (1)$$

Поскольку камешек бросают вдоль горизонтальной поверхности и сопротивлением воздуха можно пренебречь, то по закону сохранения энергии, в конечной точке траектории (при приземлении $l/l_0 = 8$) его кинетическая энергия E_3 будет иметь такое же значение, как и при старте (точка C на Рис. 10)

$$E_3 = E_1 = 8E_0. \quad (2)$$

В верхней точке траектории по закону сохранения энергии потенциальная энергия имеет максимальное значение, а кинетическая энергия E_2 , соответственно – минимальное (точка B на Рис. 10).

Минимум функции на Рис. 10 соответствует точке B с абсциссой $l/l_0 = 4$ (половина пройденного пути) и ординатой $E_k/E_0 = 2$. Следовательно

$$E_2 = 2E_0. \quad (3)$$

1.2 Начальную скорость камешка найдем, зная E_1

$$E_1 = \frac{mv_0^2}{2} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2E_1}{m}} = \sqrt{\frac{16E_0}{m}} = 4\sqrt{\frac{E_0}{m}}. \quad (4)$$

1.3 В верхней точке траектории кинетическая энергия камешка определяется только горизонтальной проекцией $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$ его начальной скорости. Следовательно

$$E_2 = \frac{mv_{0x}^2}{2} = \frac{mv_0^2(\cos \alpha)^2}{2} = E_1(\cos \alpha)^2 \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} = \frac{1}{2}. \quad (5)$$

1.4 Для вычисления времени полёта камешка необходимо найти синус угла его бросания

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - (\cos \alpha)^2} = \{(5)\} = \sqrt{1 - \frac{E_2}{E_1}} = \sqrt{\frac{E_1 - E_2}{E_1}} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (6)$$

Далее используем известную формулу для времени полёта при бросании вдоль горизонтальной поверхности

$$t_{\text{п}} = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = \{(4), (6)\} = \frac{2}{g} \sqrt{\frac{2E_1}{m}} \cdot \sqrt{\frac{E_1 - E_2}{E_1}} = \frac{2}{g} \sqrt{\frac{2(E_1 - E_2)}{m}} = \frac{4}{g} \sqrt{\frac{3E_0}{m}}. \quad (7)$$

1.5 Максимальную высоту подъёма камешка h_{max} найдём из закона сохранения механической энергии (Рис. 11)

$$\frac{mv_0^2}{2} = E_1 = E_2 + mgh_{\text{max}} \Rightarrow$$

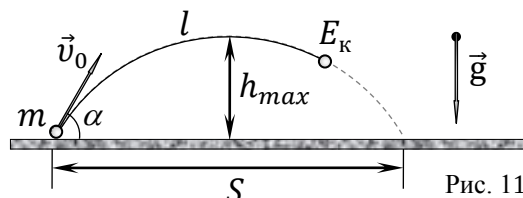


Рис. 11

$$h_{max} = \frac{E_1 - E_2}{mg} = \frac{6E_0}{mg}. \quad (8)$$

Дальность полёта камешка найдем из условия его равномерного движения по горизонтали за известное время

$$S = v_{0x} \cdot t_{\pi} = v_0 \cos \alpha \cdot \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} 2 \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} \cdot \sqrt{\frac{E_1 - E_2}{E_1}} = \frac{4}{mg} \sqrt{E_2(E_1 - E_2)} = \frac{8\sqrt{3}E_0}{mg}. \quad (9)$$

Часть 2. «Только расчёты»

2.1 Проведем необходимые вычисления с учетом правила сохранения трёх значащих цифр (столько задано в условии).

$$E_1 = 8E_0 = 80,0 \text{ Дж}, \quad E_3 = E_1 = 8E_0 = 80,0 \text{ Дж}, \quad E_2 = 2E_0 = 20,0 \text{ Дж}; \quad (10)$$

$$v_0 = 4 \sqrt{\frac{E_0}{m}} = 12,6 \frac{\text{м}}{\text{с}}; \quad (11)$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60,0^\circ = \frac{\pi}{3}. \quad (12)$$

$$t_{\pi} = \frac{4}{g} \sqrt{\frac{3E_0}{m}} = 2,23 \text{ с}. \quad (13)$$

2.2 Проведем вычисления с учетом правила сохранения количества значащих цифр

$$h_{max} = \frac{6E_0}{mg} = 6,12 \text{ м}, \quad (14)$$

$$S = \frac{8\sqrt{3}E_0}{mg} = 14,1 \text{ м}. \quad (15)$$

Уравнение траектории камешка $y(x)$ представляет собой параболу, ветви которой направлены вниз, а её вершина сдвинута вправо на $\frac{S}{2}$ и приподнята на h_{max} . Соответственно, её уравнение будет иметь вид

$$y(x) = -a \left(x - \frac{S}{2} \right)^2 + h_{max}, \quad (16)$$

где постоянная $a = \frac{4h_{max}}{S^2} = 0,123 \text{ м}^{-1}$ определяет «крутизну» ветвей параболы.

Подставляя в (16) численные значения (14) и (15), получим численное уравнение траектории камешка

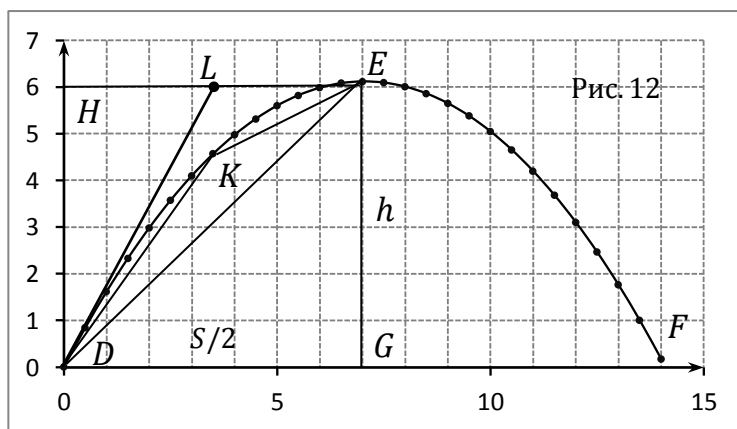
$$y(x) = (-0,123 \cdot (x - 7,05)^2 + 6,12) \text{ (м)}, \quad (17)$$

определённое на участке $[0; 14,1]$. Далее обозначим $h_{max} = h$.

Таким образом, нам необходимо как можно точнее найти длину l_{max} параболы, заданной уравнением (17).

Схематически изобразим зависимость (17) на графике (Рис. 12), где все измеряем в метрах. Оценим длину кривой DEF методом *граней*, последовательно находя её с недостатком и избытком, постепенно сужая границы.

В первом приближении поступим предельно просто: заменим половину параболы сначала хордой DE , а затем



половиной периметра прямоугольника $DHEG$ (см. Рис. 12).

Как следует из рисунка, длина половины параболы $DE = \frac{l_{max}}{2}$ больше длины гипотенузы DE прямоугольного треугольника DEG (нижняя граница)

$$DE = \sqrt{(S/2)^2 + h^2} = 9,34 \text{ м}, \quad (18)$$

но меньше суммы сторон DH и HE прямоугольника $DHEG$ (верхняя граница)

$$\sqrt{(S/2)^2 + h^2} < \frac{l_{max}}{2} < \frac{S}{2} + h. \quad (19)$$

В численных значениях это даёт (далее все измеряем в метрах)

$$9,34 < \frac{l_{max}}{2} < 13,17. \quad (20)$$

Возьмем среднее арифметическое нижней и верхней границы, тогда в первом приближении для длины траектории получаем

$$l_{max} = 2 \frac{9,34 + 13,17}{2} = 22,5 \text{ м}. \quad (21)$$

В качестве погрешности Δl_{max} первого приближения возьмем половину интервала между границами

$$\Delta l_{max} = \frac{13,17 - 9,34}{2} = 1,9. \quad (22)$$

Окончательно для первого приближения находим (все измеряли в метрах)

$$l_{max} = (22,5 \pm 1,9) \text{ м}, \quad \varepsilon = 8,4 \%. \quad (23)$$

Для второго приближения длины траектории l_{max} выберем точку K примерно на середине (по абсциссе) восходящей ветви параболы (см. Рис. 12). Новая нижняя граница будет равна сумме длин отрезков $DK = \sqrt{3,5^2 + 4,5^2} = 5,70$ и $KE = \sqrt{3,5^2 + 15^2} = 3,81$.

Далее проведём касательную к параболе в начальной точке D (см. Рис. 12) и найдем точку L её пересечения с отрезком HE . Тогда новая верхняя граница оценки будет равна сумме длин отрезков $DL = \sqrt{3,5^2 + 6,0^2} = 6,95$ и $LE = 3,5$.

В численных значениях (далее все измеряем в метрах) для второго приближения получаем

$$9,51 < \frac{l_{max}}{2} < 10,45. \quad (24)$$

Возьмем среднее арифметическое нижней и верхней границы, тогда во втором приближении для длины траектории получаем

$$l_{max} = 2 \frac{9,51 + 10,45}{2} = 20,0 \text{ м}. \quad (25)$$

В качестве погрешности второго приближения возьмем половину интервала между границами

$$\Delta l_{max} = \frac{10,45 - 9,51}{2} = 0,47 \approx 0,5. \quad (26)$$

Окончательно для второго приближения находим

$$l_{max} = (20,0 \pm 0,5) \text{ м}, \quad \varepsilon = 2,5 \%. \quad (27)$$

Как видим из сравнения (27) и (23), точность второго приближения выросла в разы, поскольку относительная погрешность ε при этом уменьшилась более, чем в три раза.

Понятно, что продолжая эту процедуру далее, т.е. добавляя на середине каждого отрезка новые точки деления и проводя новые касательные к концам дуг, мы будем получать все более и более точные ($\varepsilon \rightarrow 0$) оценки для длины параболы.

При достаточно большом числе разбиений ($N \rightarrow \infty$) будет получено точное значение l_{max} длины параболы между точками бросания и приземления камешка.

Можно показать (от школьников не требуется), что точное значение длины дуги функции $f(x)$ на участке $[0; S]$ дается определённым интегралом

$$l_{max} = \int_0^S \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx, \quad (28)$$

где $f'(x)$ – производная от рассматриваемой функции. В данном случае $f(x)$ – парабола (17), а её производная: $f'(x) = (-0,246x + 1,7343)$.

В нашем случае несколько громоздкое интегрирование (28) приводит к окончательному результату

$$l_{max} = 2h\sqrt{1 + \xi^2} + \frac{S}{2}\xi \cdot \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 + \xi^2}}{\xi}\right), \quad (29)$$

где безразмерный параметр ξ равен $\xi = \frac{S}{4h}$.

Для полученной траектории ($\xi = 0,576$; $h = 6,12$ м; $S = 14,1$ м) расчет по формуле (29) даёт значение для длины траектории

$$l_{max} = 19,48 \text{ м}. \quad (30)$$

Заметим, что современные инженерные калькуляторы, которыми разрешено пользоваться на олимпиаде, позволяют вычислить интеграл (28) непосредственно методом Гаусса – Кронрода

$$l_{max} = \int_0^{14,1} \sqrt{1 + (-0,246x + 1,7343)^2} dx = 19,47 \text{ м}. \quad (31)$$

Как видим из (30) и (31), и аналитическое, и численное интегрирование с точностью до трёх значащих цифр приводят к одному и тому же результату, который условимся считать «точным» значением искомой величины в рамках нашей задачи

$$l_{max} = 19,5 \text{ м}. \quad (32)$$

Как следует из сравнения (32) и (27), «точный» результат для длины l_{max} траектории камешка попал в интервал оценки (правда, на самый краешек...) уже на втором шаге (при втором приближении), что весьма неплохо для выбранного приближенного метода оценки.

Логично ожидать, что следующее (третье) приближение (с двумя точками привязки на параболе) позволит вычислить искомую длину траектории с еще большей точностью (меньшей относительной погрешностью).

Учитывая, что время олимпиады ограничено, а вывод точной формулы (29) от школьников не требуется, можно считать достаточно успешным выполнение даже двух приближений с получением результатов, близких к (27). При этом «точное» значение (32) должно попасть в интервал оценки.

Таким образом, простые идеи и вычислительная настойчивость позволяют с неплохой точностью вычислять сложные суммы.

2.3 Зная длину траектории (27), находим искомое значение безразмерного параметра l_0

$$l_{max} = 8l_0 \quad \Rightarrow \quad l_0 = \frac{l_{max}}{8} = \frac{20,0}{8} \text{ м} = 2,50 \text{ м}. \quad (33)$$

Заметим, что если в качестве l_{max} использовать «точное» значение (32), то ответ несколько уточнится

$$l_0 = \frac{l_{max}}{8} = \frac{19,5}{8} \text{ м} = 2,44 \text{ м}. \quad (34)$$

Задание 10-3. Цикл Карно

В современном мире успешно работают миллионы машин, основная часть которых использует как бензиновые, так и дизельные двигатели внутреннего сгорания (ДВС). Доля электромобилей на мировом рынке в настоящий момент крайне невелика – около 2 %.



Рис. 1

При создании ДВС в середине XIX века перед инженерами и конструкторами встал важный прикладной (и научный!) вопрос: а какой тепловой двигатель имеет максимальный термодинамический КПД, т.е. является идеальной тепловой машиной?

Заметим, что цикл Отто (бензиновый двигатель) и цикл Дизеля (дизельный двигатель) не являются идеальными тепловыми циклами, хотя автомобили, работающие по этим циклам, и составляют львиную долю современного производства. Так что же, наша цивилизация так глупа?

Впервые идеальная тепловая машина была описана в 1824 г. французским физиком и инженером Сади Карно (Рис. 1) в скромной работе «Размышления о движущей силе огня и о машинах, способных развивать эту силу». Заметим, что эта сравнительно небольшая работа содержала «всего лишь» 65 страниц, 5 поясняющих рисунков и 2 теоремы.

Интересно, что сам автор так и не счел необходимым изобразить графически свой знаменитый цикл (Рис. 2), известный сегодня каждому школьнику, он привёл только его точные описания ...

С. Карно был талантливым учеником известного математика и физика Семиона Дени Пуассона, который в 1823 г. впервые получил уравнение адиабатного процесса (уравнение Пуассона) и предложил тему дальнейшего перспективного исследования молодому Карно.

Интуиция и предчувствия не подвели Пуассона – пионерская работа активного Карно со временем стала фундаментальной, принесла автору мировую известность и положила начало новому разделу физики – термодинамике.

Справочные данные и параметры рассматриваемой системы: если $a^n b^m = \text{const}$, то при малых Δa и Δb ($\Delta a \ll a$, $\Delta b \ll b$) справедливо равенство: $n \frac{\Delta a}{a} + m \frac{\Delta b}{b} = 0$ (справедливо также и обратное утверждение); затонированная площадь S (Рис. 3) под гиперболой $y = \frac{k}{x}$ вычисляется через натуральный логарифм по формуле $S = k \cdot \ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$, молярная газовая постоянная $R = 8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$.

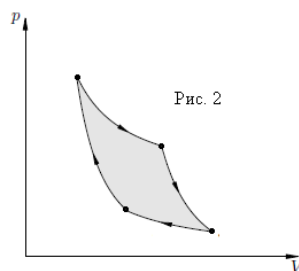


Рис. 2

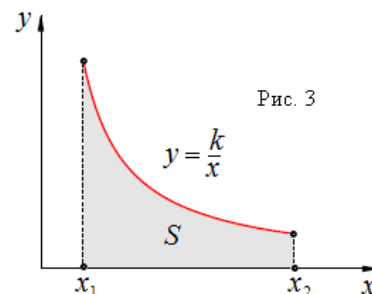


Рис. 3

Часть 1. Адиабатный процесс

Термодинамический процесс, проводимый без теплообмена ($Q = 0$) с окружающей средой (т.е. в теплоизолированной системе), называется *адиабатным* процессом. Адиабатными являются многие быстропротекающие процессы (взрыв, быстрое расширение (сжатие) газа, распространение звуковой волны), процесс подъема теплого воздуха с поверхности земли с последующим охлаждением, конденсацией пара и образованием облаков и т.д.

1.1 Теплоёмкость c^M идеального газа, взятого в количестве $\nu = 1$ моль ($m = M$), называется молярной теплоёмкостью. Найдите молярную теплоёмкость c_V^M идеального одноатомного газа при изохорном процессе, т.е. при постоянном объёме ($V = \text{const}$). Запишите формулу для

внутренней энергии U идеального одноатомного газа через c_V^M и в дальнейшем используйте её для любого идеального газа.

1.2 Выразите молярную теплоемкость идеального газа c_p^M при постоянном давлении ($p = \text{const}$), т.е. при изобарном процессе, через c_V^M .

1.3 Получите уравнение адиабатного процесса для произвольного идеального газа в переменных (T, V) с показателем адиабаты $\gamma = \frac{c_p^M}{c_V^M}$.

1.4 В полученном уравнении сделайте замену переменных и запишите уравнение адиабатного процесса для произвольного идеального газа в «традиционном» виде, т.е. в переменных (p, V) .

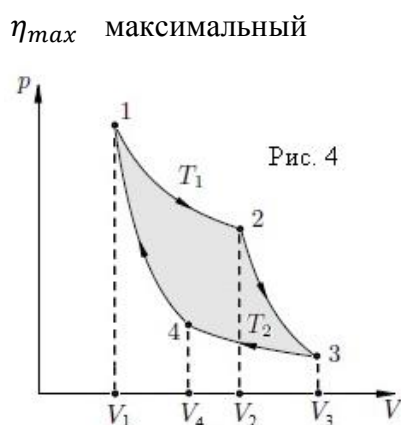
1.5 Схематически изобразите на одной (p, V) – диаграмме ход адиабаты и изотермы идеального газа. Кратко охарактеризуйте особенности построенных графиков.

Часть 2. Идеальный цикл (цикл Карно)

Карно доказал, что идеальная тепловая машина, реализующая максимальный термодинамический КПД при заданных температурах нагревателя T_1 и холодильника T_2 ($T_1 > T_2$), должна работать по обратимому циклу (Рис. 4), состоящему из двух изотерм и двух адиабат (вторая теорема Карно).

Более того, $\eta_{\max}$ для цикла Карно не зависит от типа рабочего тела (т.е. не важно, какой именно идеальный газ используется!). Он определяется только температурами нагревателя T_1 и холодильника T_2 (первая теорема Карно).

При идеальном цикле изотерма $1 \rightarrow 2$ осуществляется при большей температуре T_1 , далее следует адиабатный переход $2 \rightarrow 3$, изотерма $3 \rightarrow 4$ при меньшей температуре T_2 и, наконец, адиабатное возвращение $4 \rightarrow 1$ к начальной точке цикла (см. Рис. 4). Величины T_1 , T_2 , V_1 , V_2 , V_3 , V_4 для цикла Карно считайте известными.

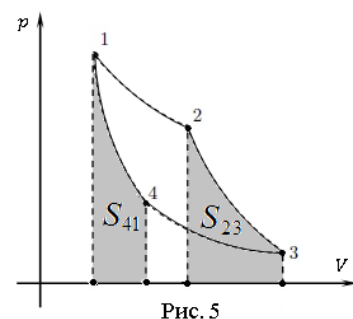


2.1 Докажите «правило объемов» для цикла Карно, согласно которому произведение «крайних» объемов равно произведению «средних»: $V_1 V_3 = V_2 V_4$.

2.2 Докажите «правило адиабатных площадей» для данного цикла, которое утверждает, что площади S_{23} и S_{41} под адиабатами $2 \rightarrow 3$ и $4 \rightarrow 1$ на (p, V) – диаграмме цикла Карно (Рис. 5) одинаковы: $S_{23} = S_{41}$.

2.3 Найдите количество теплоты Q_1 , полученной идеальным газом от нагревателя, и количество теплоты Q_2 , отданной им холодильнику.

2.4 Выведите формулу для максимального термодинамического КПД $\eta_{\max}$ цикла Карно, осуществляемого при данных температурах нагревателя T_1 и холодильника T_2 .



Возможные решения:

Часть 1. Адиабатный процесс

1.1 Внутренняя энергия идеального одноатомного газа вычисляется по формуле

$$U = \frac{3}{2} \frac{m}{M} RT = \frac{3}{2} \nu RT. \quad (1)$$

Поскольку при изохорном процессе ($V = \text{const}$) работа газом не совершается, то при нагревании идеального одноатомного газа на ΔT увеличится только его внутренняя энергия на ΔU

$$\Delta U = \frac{3}{2} \nu R \Delta T. \quad (2)$$

С другой стороны, согласно условию, можем записать

$$\Delta U = c_V^M \nu \Delta T. \quad (3)$$

Сравнивая (2) и (3), находим молярную теплоёмкость идеального одноатомного газа при постоянном объёме

$$c_V^M = \frac{3}{2} R. \quad (4)$$

Заметим, что двухатомного идеального газа при комнатных температурах $c_V^M = \frac{5}{2} R$, для трёхатомного $c_V^M = \frac{6}{2} R$ и далее она монотонно возрастает в зависимости от числа атомов и особенностей (температуры) изохорного процесса.

Используя (4) и (1), запишем внутреннюю энергию U любого идеального газа в общем виде

$$U = c_V^M \nu T = \nu c_V^M T. \quad (5)$$

1.2 Согласно первому началу термодинамики при произвольном процессе количество теплоты ΔQ , сообщенное газу, идет на изменение его внутренней энергии ΔU и совершение газом работы $\Delta A = p \Delta V$

$$\Delta Q = \Delta U + p \Delta V. \quad (6)$$

Рассмотрим два близких состояния системы (p, V) и $(p + \Delta p, V + \Delta V)$. Из уравнения состояния идеального газа в форме Клапейрона – Менделеева для этих изобарных состояний можем записать

$$\begin{aligned} pV &= \nu R \Delta T \\ p(V + \Delta V) &= \nu R(T + \Delta T). \end{aligned} \quad (7)$$

Вычитая уравнения, из (7) найдем

$$p \Delta V = \nu R \Delta T. \quad (8)$$

Подставляя (8) в (6), с учетом (3) получим для изобарного процесса

$$\Delta Q = c_V^M \nu \Delta T + \nu R \Delta T. \quad (9)$$

Теперь, по определению, легко находим молярную теплоёмкость идеального газа при постоянном давлении

$$c_p^M = \frac{\Delta Q}{\nu \Delta T} = \frac{c_V^M \nu \Delta T + \nu R \Delta T}{\nu \Delta T}. \quad (10)$$

После сокращения на $\nu \Delta T$, окончательно получаем, что для произвольного идеального газа справедливо равенство

$$c_p^M = c_V^M + R. \quad (11)$$

Уравнение (11) было получено в 1842 г. немецким естествоиспытателем и очень внимательным медиком (!) Р. Майером, который первым заметил различия в цвете крови (!!) на экваторе и в средних широтах. Где кровь, а где термодинамика ...? ☺

Таким образом, согласно уравнению Майера, молярная газовая постоянная R (см. размерность) даёт разность между молярными теплоемкостями идеального газа при различных процессах: изобарным и изохорным.

1.3 По определению адиабатный процесс осуществляется в теплоизолированной термодинамической системе, т.е. без теплообмена ($Q = 0$) с окружающей средой, следовательно, первое начало термодинамики для него примет вид

$$Q = 0 = \Delta U + A. \quad (12)$$

Из (12) следует, что малая работа ΔA идеального газа при малом объемном расширении на ΔV совершается только за счет убыли его внутренней энергии (притока теплоты нет)

$$\Delta A = p\Delta V = -\Delta U. \quad (13)$$

С учетом (5) перепишем (13) в виде

$$p\Delta V = -\Delta U = -\nu c_V^M \Delta T. \quad (14)$$

Выразим давление идеального газа из уравнения Клапейрона – Менделеева

$$pV = \nu RT \quad \Rightarrow \quad p = \frac{\nu RT}{V}. \quad (15)$$

С учетом (15) выражение (14) примет вид

$$\frac{\nu RT}{V} \Delta V = -\nu c_V^M \Delta T \quad \Rightarrow \quad -\frac{R}{c_V^M} \cdot \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta T}{T}. \quad (16)$$

Перепишем (16) в «удобном» виде, чтобы воспользоваться математической подсказкой из условия задачи

$$\frac{\Delta T}{T} + \frac{R}{c_V^M} \cdot \frac{\Delta V}{V} = 0. \quad (17)$$

Теперь, с учетом математической подсказки из условия задачи, можем заключить, что справедливо равенство

$$TV^{\frac{R}{c_V^M}} = TV^{\gamma-1} = \text{const}. \quad (18)$$

Поскольку $\frac{R}{c_V^M} = \gamma - 1$, то окончательно получим

$$TV^{\gamma-1} = \text{const}.$$

где $\gamma = 1 + \frac{R}{c_V^M} = \frac{c_V^M + R}{c_V^M} = \frac{c_p^M}{c_V^M} > 1$ – показатель адиабаты Пуассона.

Несмотря на то, что уравнение адиабатного процесса в виде (18) легче выводится, чаще (с подачи самого Пуассона) оно используется в выражении через переменные (p, V) .

1.4 Перепишем уравнение адиабаты для идеального газа в наиболее распространенном, «классическом» виде, которое использовал Пуассон, т.е. в переменных (p, V) .

Для замены переменных из (15) выразим температуру T и подставим в (18)

$$pV = \nu RT \quad \Rightarrow \quad T = \frac{pV}{\nu R} \quad \Rightarrow \quad \frac{pV}{\nu R} V^{\gamma-1} = \text{const} \quad \Rightarrow \quad pV^{\gamma} = \text{const}^* \quad (19)$$

Следовательно, уравнение адиабатного процесса (Пуассона) для произвольного идеального газа в параметрах $(p; V)$ можно записать в виде

$$pV^{\gamma} = \text{const}, \quad (20)$$

где показатель адиабаты $\gamma = \frac{c_p^M}{c_v^M} > 1$.

1.5 Выразим зависимость давления от объема $p(V)$ идеального газа при изотермическом процессе

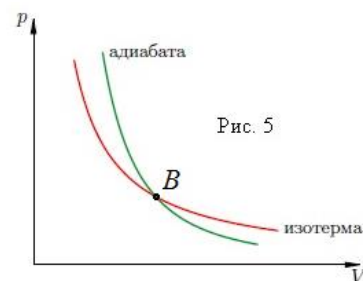
$$p = \frac{\nu RT}{V} = \frac{\text{const}_1}{V}, \quad (21)$$

и при адиабатном процессе

$$p = \frac{\text{const}_2}{V^\gamma}. \quad (22)$$

Поскольку $\gamma > 1$, то из (21) и (22) следует, что с ростом объема V идеального газа на (p, V) – диаграмме адиабата убывает «быстрее», чем изотерма. Можно сказать и по другому: на (p, V) – диаграмме адиабата идет «круче», чем изотерма, поэтому у них обязательно будет точка пересечения B (Рис. 5).

Соответственно, после точки пересечения графиков (см. Рис. 5), при $V \rightarrow \infty$ адиабата всегда прижимается «ближе» к оси абсцисс (объемов), т.е. как бы «ныряет» под изотерму.



Часть 2. Идеальный цикл (Цикл Карно)

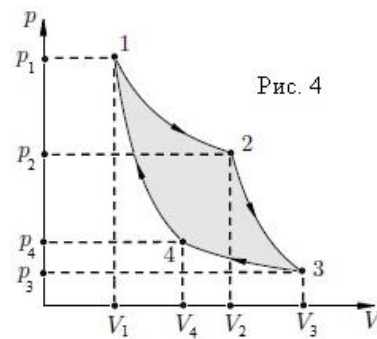
2.1 Для доказательства «правила объемов» используем условие замкнутости цикла Карно и запишем уравнения всех процессов идеального газа (изотерм и адиабат) по ходу цикла

$$\begin{aligned} p_1 V_1 &= p_2 V_2 \\ p_2 V_2^\gamma &= p_3 V_3^\gamma \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} p_3 V_3 &= p_4 V_4 \\ p_4 V_4^\gamma &= p_1 V_1^\gamma \end{aligned} \quad (24)$$

Перемножив все уравнения (23) и (24), получим «длинное» равенство

$$p_1 V_1 \cdot p_2 V_2^\gamma \cdot p_3 V_3 \cdot p_4 V_4^\gamma = p_2 V_2 \cdot p_3 V_3^\gamma \cdot p_4 V_4 \cdot p_1 V_1^\gamma, \quad (25)$$



которое, после сокращений, даёт

$$V_2^{\gamma-1} V_4^{\gamma-1} = V_3^{\gamma-1} V_1^{\gamma-1}. \quad (26)$$

Из (26), после извлечения корня $(\gamma - 1)$ степени, следует искомое равенство (произведение «крайних» объемов равно произведению «средних»)

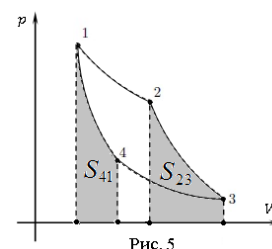
$$V_1 V_3 = V_2 V_4. \quad (27)$$

Интересно, что «правило объемов» будет также справедливо и для любых замкнутых политропических циклов вида $pV^n = \text{const}$, поскольку результат (27) не зависит от γ .

2.2 Рассмотрим адиабаты $2 \rightarrow 3$ и $4 \rightarrow 1$ цикла Карно. При адиабатном расширении $2 \rightarrow 3$ работа газа A_{23} положительна ($V_3 > V_2$) и равна затонированная площади S_{23} под адиабатой

$$S_{23} = A_{23}. \quad (28)$$

С другой стороны, система теплоизолирована, поэтому из первого начала термодинамики следует, что эта работа равна разности внутренних энергий газа в начальном и конечном состояниях (на верхней и нижней изотермах, газ при этом остывает)



$$S_{23} = A_{23} = -\Delta U_{23} = \nu c_V^M (T_1 - T_2), \quad (29)$$

где $c_V^M = \frac{R}{\gamma-1}$ для данного идеального газа.

Аналогично, при адиабатном сжатии $4 \rightarrow 1$ модуль работы A_{41} газа равен площади под графиком (она отрицательна ($V_1 < V_4$))

$$S_{41} = |A_{41}|. \quad (30)$$

Работа газа при этом также равна разности энергий на тех же изотермах (газ при этом нагревается, поскольку его сжимают)

$$-S_{41} = A_{41} = -\Delta U_{41} = -\nu c_V^M (T_1 - T_2) = -A_{23}. \quad (31)$$

Из (29) и (31) следует, что на (p, V) – диаграмме цикла Карно затонированные площади под адиабатами равны

$$S_{23} = S_{41}. \quad (32)$$

2.3 Для нахождения количества теплоты Q_1 , полученной газом от нагревателя с температурой T_1 , рассмотрим изотермическое расширение $1 \rightarrow 2$ цикла Карно (Рис. 6).

При таком процессе, согласно первому началу термодинамики

$$Q_1 = A_{12}, \quad (33)$$

а зависимость давления от объема является гиперболической

$$p(V) = \frac{\nu RT_1}{V} = \frac{const}{V}. \quad (34)$$

Как следует из математической подсказки, работа газа при таком процессе положительна ($V_2 > V_1$) и равна площади под гиперболой (см. Рис. 6)

$$Q_1 = A_{12} = \nu RT_1 \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right). \quad (35)$$

Аналогично заметим, что при изотермическом сжатии $3 \rightarrow 4$ работа газа будет отрицательна ($V_4 < V_3$) и количество теплоты Q_2 , отданное холодильнику равно

$$Q_2 = A_{34} = \nu RT_2 \ln \left(\frac{V_4}{V_3} \right) = -\nu RT_2 \ln \left(\frac{V_3}{V_4} \right). \quad (36)$$

2.4 По определению термодинамический КПД цикла равен

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{\nu RT_2 \ln \left(\frac{V_3}{V_4} \right)}{\nu RT_1 \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)}. \quad (37)$$

Из правила объёмов (27) следует, что

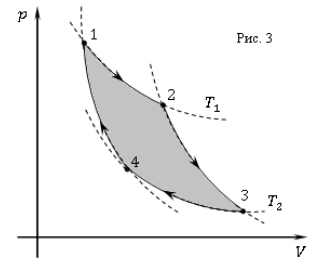
$$\frac{V_3}{V_4} = \frac{V_2}{V_1} \Rightarrow \ln \left(\frac{V_3}{V_4} \right) = \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right). \quad (38)$$

С учетом (38) можем сократить натуральные логарифмы в (37), и получим знаменитую формулу для максимального КПД идеальной тепловой машины, работающей по циклу Карно

$$\eta_{max} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (37)$$

Как видим из (37), КПД идеальной тепловой машины η_{max} определяется только температурами нагревателя и холодильника (т.н. «тепловых резервуаров»). Он не зависит от показателя адиабаты (т.е. вида газа или рода рабочего тела), степени расширения (сжатия) газа и т.д.

Однако практическое использование цикла Карно (как и всего идеального!) не представляется возможным – требования равновесности и обратимости процессов цикла увеличивают время проведения цикла до бесконечности и сводят на ноль его полезную



мощность! Так что цивилизация не так уж и глупа: лучше иметь двигатель с меньшим КПД, но с большей полезной (используемой) мощностью. Лучше синица в руках, чем журавль в небе... ☺