



Республиканская физическая олимпиада 2024 года (Заключительный этап)

Теоретический тур

11 класс.

Внимание! Прочтите в первую очередь.

1. Полный комплект состоит из 3 заданий. Для вашего удобства вопросы, на которые Вам необходимо ответить, помещены в рамки.
2. На отдельном листе приведены формулы приближенных вычислений, используйте их при решении задач, там, где это необходимо.
3. Решения задач выполняйте на отдельных чистых рабочих листах. Самостоятельно разделите их на черновики и чистовые листы. Рекомендуем сначала решать в черновике, а затем красиво оформить решение на чистовых листах. Решение каждого задания начинайте с нового чистового листа. В решении приведите рисунки (в некоторых заданиях рисунки необходимы, даже в том случае, когда это не оговорено в условии), исходные уравнения с кратким обоснованием, решения уравнений (комментарии к математическим выкладкам не требуются), окончательные результаты. Окончательные решения обязательно занесите в листы ответов. Чистовые листы пронумеруйте. Черновые листы после окончания работы перечеркните. **Черновики проверяться не будут!**
4. Листы ответов содержат отдельные разделы в соответствии с пунктами полученных Вами заданий. Конечные формулы и требуемые численные значения занесите в соответствующие выделенные поля. Если по условию заданий от Вас требуется построение графика, используйте подготовленные бланки в Листах ответов, не забудьте подписать и оцифровать оси координат.
5. Все ваши работы сканируются, поэтому пишите только на одной стороне листа. Подписывать рабочие листы и листы ответов запрещается.
6. В ходе работы можете использовать ручки, карандаши, чертежные принадлежности, калькулятор.
7. После окончания работы сложите листы в следующем порядке: листы ответов; пронумерованные чистовые листы; перечеркнутые черновики.
8. Со всеми вопросами, связанными с условиями задач, обращайтесь к организаторам олимпиады.

Пакет содержит:

- титульный лист (1 стр.);
- лист математических подсказок (1 стр.);
- условия 3 теоретических заданий (7 стр.);
- листы ответов (5 стр.);

11 класс. Теоретический тур. Вариант 1.



Формулы приближенных вычислений.

При решении задач Вам могут понадобиться следующие приближенные формулы

1. $(1+x)^{\gamma} \approx 1 + \gamma x$

формула справедлива при любых (целых, дробных, положительных, отрицательных) значениях степени γ .

$$\sin x \approx x$$

2. $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$

аргументы тригонометрических функций должны быть заданы в радианах.

3. $e^x \approx 1 + x$.

Комментарии.

1. Во всех формулах величина x безразмерная и значительно меньше 1: $x \ll 1$
2. Для использования этих формул, прежде всего необходимо привести вашу формулу к стандартному виду, которые даны здесь.
3. В ходе приближенных преобразований соблюдайте правило соблюдения порядка малости: если вы отбрасываете малые величины порядка x^2 и выше – отбрасывайте их сразу в промежуточных выкладках; если вы сохраняете величины определенного порядка, то сохраняйте их во всех преобразованиях

Задание 1. Гигантомания

Данное задание состоит из трех не связанных между собой задач на одну тему.

Во всех задачах следует пренебрегать:

- взаимодействием тел с Солнцем и другими небесными телами;
- движением Земли вокруг Солнца и ее вращение вокруг собственной оси;
- сопротивлением воздуха.

Вам могут понадобиться (а могут и не понадобиться) следующие характеристики Земли:
радиус $R = 6,4 \cdot 10^6 \text{ м}$; масса $M = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ кг}$; ускорение свободного падения на поверхности Земли $g = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Задача 1.1 Падение камушка

Сферическое тело радиуса $R = 200 \text{ м}$ находится на расстоянии $h = 100 \text{ м}$ от поверхности Земли (см. рис.) и начинает падать на землю без начальной скорости.



1.1.1 За какое время τ тело упадет на Землю? Получите формулу и рассчитайте численное значение.

1.1.2 С какой скоростью v относительно Земли упадет тело на поверхность Земли? Получите формулу и рассчитайте численное значение.

Решите задачу в двух случаях:

- а) плотность падающего тела равна средней плотности Земли;
- б) масса тела равна массе Земли (т.е. тело – небольшая нейтронная звездочка).

Задача 1.2 Космический корабль.

Космический корабль движется по круговой орбите вокруг Земли на высоте h над поверхностью Земли, которая значительно меньше радиуса Земли. Размеры корабля значительно меньше радиуса Земли.

1.2. Чему равен период обращения спутника вокруг Земли T ? Получите формулу и рассчитайте численное значение.

Решите задачу в двух случаях:

- а) масса корабля значительно меньше массы Земли;
- б) масса корабля равна массе Земли.

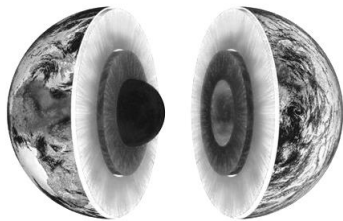
Задача 1.3 Эталон часа

На поверхности Земли построили башню, высота которой немного превышает радиус Земли R . К вершине башни прикрепили математический маятник длины R . Массой подвеса можно пренебречь, подвешенный груз можно считать материальной точкой, масса которой значительно меньше массы Земли.



1.3 Чему равен период малых колебаний T этого маятника? Получите формулу и рассчитайте численное значение.

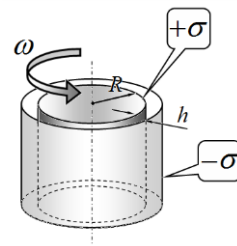
Задание 2. Магнитное динамо



Теория возникновения и существования магнитного поля Земли до настоящего времени окончательно не разработана. В данном задании вам предстоит проанализировать примитивную модель, на первый взгляд, позволяющую описать возникновение магнитного поля, благодаря эффекту магнитного динамо.

Не вызывает сомнений, что магнитное поле Земли существует благодаря, во-первых, наличию в ядре Земли хорошо проводящего слоя расплавленного железа, во-вторых, вращению Земли вокруг своей оси.

Рассмотрим следующую модель: тонкий цилиндрический слой проводящего вещества вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью ω . Обозначим внутренний радиус этого слоя R , а его толщину h , причем $h \ll R$, удельное электрическое сопротивление этого слоя равно ρ , диэлектрическими и магнитными свойствами слоя пренебрегаем $\varepsilon = \mu = 1$. Этот слой находится в непроводящей среде.



Основная идея генерации магнитного поля следующая. Пусть на внутренней поверхности слоя случайно возник электрический заряд, поверхностная плотность которого равна $+\sigma$, тогда на внешней поверхности появится равный по модулю электрический заряд с поверхностной плотностью $-\sigma$. При вращении слоя эти заряды создают магнитное поле, которое воздействует на электроны в проводящем слое, что может приводить к возникновению электрического тока между внутренней и внешней поверхностью рассматриваемого поля, что, в свою очередь, может приводить к увеличению плотности зарядов и как, следствие, к усилению самого магнитного поля.

Подсказки

Если на боковой поверхности цилиндра находится равномерно распределенный заряд с поверхностной плотностью σ , то эти заряды создают радиальное электрическое поле у поверхности цилиндра, напряженность которого равна

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} . \quad (1)$$

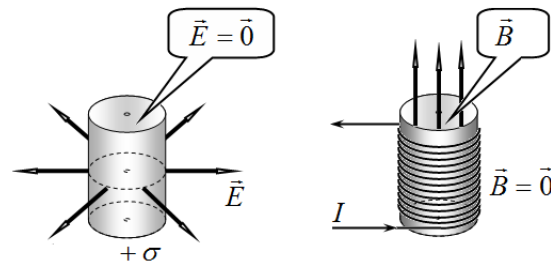
Внутри цилиндра электрическое поле отсутствует. В данном задании можно считать, что модуль напряженности электрического поля в рассматриваемом тонком слое постоянен и определяется формулой (1)

Если по обмотке цилиндрического соленоида протекает электрический ток силы I , то этот ток внутри цилиндра создает однородное магнитное поле, направленное вдоль оси цилиндра, модуль которого равен

$$B = \mu_0 n I , \quad (2)$$

где n - плотность намотки (число витков на единицу длины). Вне соленоида магнитное поле отсутствует.

Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{\text{м}}$. Магнитная постоянная $\mu_0 = 1,26 \cdot 10^{-6} \frac{\Gamma_H}{\text{м}}$.



Часть 1. Поле в слое

Для описания рассматриваемого явления введем декартовую систему координат внутри слоя:

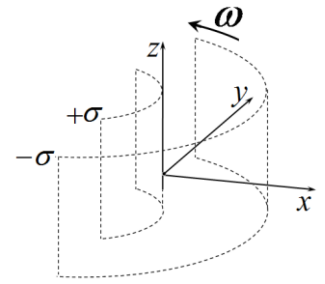
Ось x - радиально, перпендикулярно боковым поверхностям слоя;

Ось y - по касательной к внутренней поверхности слоя,

перпендикулярно его оси;

Ось z - параллельно оси слоя;

начало координат находится на внутренней поверхности слоя.



1.1 В листе ответов укажите направления векторов: напряженности электрического поля $\vec{E}$, индукции магнитного поля $\vec{B}$, скорости движения $\vec{v}$ в точке, находящейся внутри слоя на оси x .

1.2 Выразите модуль индукции магнитного поля внутри слоя B через поверхностную плотность зарядов σ , угловую скорость вращения ω и радиус слоя R .

1.3 В листе ответов укажите направления сил, действующих на электрон внутри слоя: $\vec{F}_E$ со стороны электрического поля, $\vec{F}_B$ - со стороны магнитного поля.

1.4 Укажите, чему равны модули сил $\vec{F}_E$ и $\vec{F}_B$.

Часть 2. Заряды и токи

В этой части массой электроном следует пренебречь.

2.1 Получите уравнение, описывающее изменение поверхностной плотности зарядов с течением времени $\frac{\Delta\sigma}{\Delta t}$, включающее только характеристики проводящего слоя и физические постоянные.

2.2 Определите «критическую» скорость движения слоя $V^* = \omega^* R$, при превышении которой магнитное поле внутри слоя может возрасти с течением времени. Рассчитайте ее численное значение.

Будем считать, что радиус слоя равен $R = 3,5 \cdot 10^6 \text{ м}$ (что равно радиусу ядра Земли), удельное электрическое сопротивление слоя $\rho = 1,4 \cdot 10^{-6} \text{ Ом} \cdot \text{м}$ (сопротивление расплавленного железа).

2.3 Рассчитайте длительность суток на Земле, если скорость движения рассматриваемого слоя достигнет критической величины V^* .

2.4 Пусть поверхностная плотность зарядов на поверхностях слоя в некоторый момент равна σ_0 . Оцените характерное время исчезновения этих зарядов, если угловая скорость вращения слоя равна угловой скорости вращения Земли.

Часть 3. Спасает ли модель масса электрона?

В этой части вам необходимо модифицировать рассматриваемую модель с учетом массы электрона $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$ (заряд электрона $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$). Считайте, что рассматриваемый слой вращается с угловой скоростью равной угловой скорости вращения Земли.

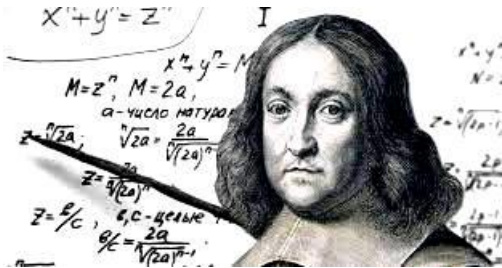
3.1 Покажите, что при учете массы электрона, возможно существования стационарных зарядов на поверхностях слоя. Получите формулу для поверхностной плотности этих зарядов.

3.2 Рассчитайте индукцию магнитного поля внутри слоя в этом случае. Сравните полученное значение со средним значением индукции магнитного поля на поверхности земли $B_0 \approx 40 \text{ мкТл}$.

3.3 Сделайте вывод: описывает ли рассмотренная модель механизм возникновения магнитного поля Земли?

Задание 3. Таутохронизм и принцип Ферма

Принцип Ферма (принцип наименьшего времени Ферма) — постулат в геометрической оптике, согласно которому свет выбирает из множества путей между двумя точками тот путь, который потребует наименьшего времени.



Этот принцип, сформулированный в I в. Героном Александрийским для отражения света, в общем виде был сформулирован Пьером Ферма в 1662 году в качестве самого общего закона геометрической оптики.

Википедия

Долгое время принцип Ферма считался мистическим: «Где у света такой мозг, который заранее может рассчитать путь кратчайшего времени?»

Конечно, у света мозга нет, но докажите, что он есть у Вас!

В данном задании вам необходимо решить несколько оптических задач с помощью принципа Ферма. Будем считать, что законы отражения и преломления света Вам не известны, но Вы знаете и верите в принцип Ферма. Закон прямолинейного распространения света использовать разрешено.

Внимание! Решения, в которых явно используются законы отражения и преломления света не рассматриваются и не оцениваются!

Во всех задачах, связанных с зеркалами и линзами, используйте параксиальное приближение, т.е. считайте, что рассматриваются лучи идут на малом расстоянии от оптической оси и под малыми углами к этой оси.

Часть 1. Математическое введение.

Чтобы упростить математические выкладки при решении физических задач, используйте следующие математические формулы.

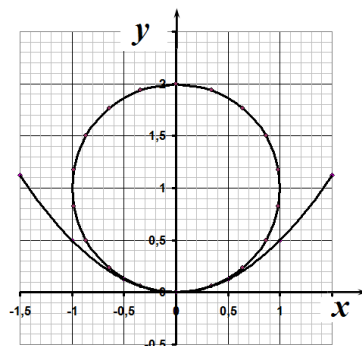
1.1 Докажите, что при $x \ll a$ справедлива приближенная формула

$$\sqrt{a^2 + x^2} \approx a + \frac{x^2}{2a}. \quad (1)$$

Небольшую дугу окружности можно приближенно заменить участком параболы. Пусть центр окружности радиуса R лежит на оси y и окружность касается оси x . Тогда, уравнение соприкасающейся с окружностью в начале координат параболы имеет вид

$$y = \frac{x^2}{2R}. \quad (2)$$

На рисунке показана окружность единичного радиуса и соприкасающаяся с ней парабола.

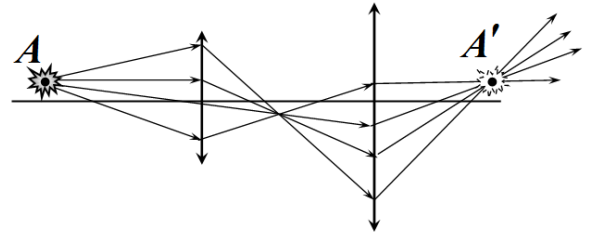


1.2 Докажите формулу (2) для уравнения соприкасающейся параболы.

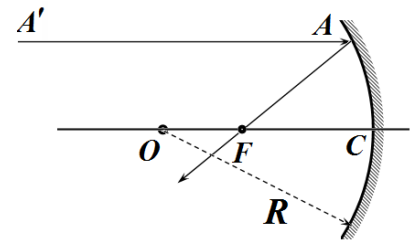
Даже если Вы не смогли доказать эти формулы, Вы имеете право использовать их в дальнейшем.

Часть 2. Таутохронизм

Таутохронизм означает постоянство времени. Частным случаем принципа Ферма является **принцип таутохронизма**. Этот принцип утверждает, что для любой оптической системы, формирующей изображение, время прохождения света от точечного источника A до его изображения A' вдоль любого луча одинаково. Иными словами – точка изображение есть точка A' время достижения которой от источника не зависит от траектории луча света.

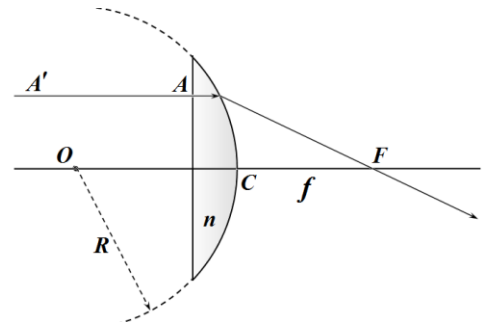


Задача 2.1 На рисунке показано вогнутой сферическое зеркало радиуса R : O - центр кривизны зеркала, C - его оптический центр; OC - главная оптическая ось зеркала.



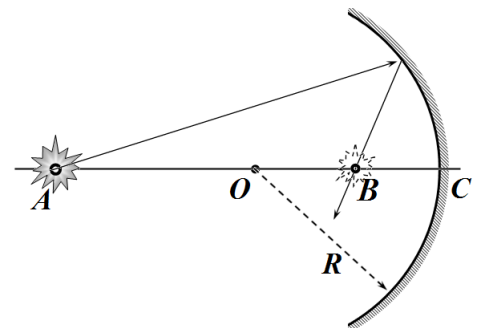
2.1 Используя принцип таутохронизма, докажите, что все лучи $A'A$, параллельные главной оптической оси после отражения от зеркала пересекутся в одной точке F , которая называется фокусом. Найдите фокусное расстояние зеркала $f = |FC|$.

Задача 2.2 На рисунке показана плосковыпуклая линза. Радиус сферической поверхности линзы равен R , показатель преломления материала линзы равен n . O - центр кривизны выпуклой поверхности; C - оптический центр линзы, OC - главная оптическая ось линзы.



2.2 Используя принцип таутохронизма, докажите, что все лучи $A'A$, параллельные главной оптической оси после преломления в линзе от пересекутся в одной точке F , которая называется фокусом. Найдите фокусное расстояние линзы $f = |FC|$.

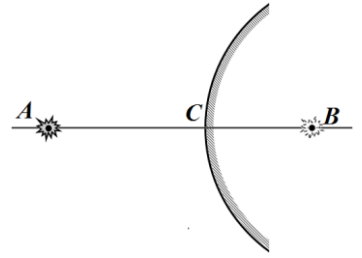
Задача 2.3 На главной оптической оси вогнутого сферического зеркала радиуса R находится точечный источник света A на расстоянии $a = |AC|$ от оптического центра зеркала. Изображение этого источника находится в точке B на расстоянии $b = |BC|$ от оптического центра.



2.3.1 Используя принцип таутохронизма, докажите, что зеркало формирует действительное изображение точечного источника.

2.3.2 Получите «формулу вогнутого зеркала», связывающую расстояния a и b и фокусное расстояние зеркала f .

Задача 2.4 Как известно, изображения могут быть мнимыми.



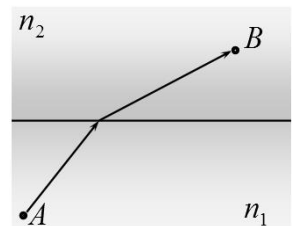
2.4.1 Модернизируйте принцип таутохронизма так, чтобы с его помощью можно было рассчитывать положения мнимых изображений. (Приведите свою формулировку, доказательство не требуется).

2.4.2 Покажите что, «формула выпуклого зеркала», связывающая расстояние от точечного источника до оптического центра зеркала $a = |AC|$, расстояние от оптического центра до изображения этого источника $b = |CB|$ и фокусное расстояние зеркала, можно записать в том же виде, что и «формулу вогнутого зеркала», полученную в п. 2.3.2, если переопределить величины, входящие в эту формулу (укажите, эти величины).

2.4.3 Несмотря на то, что уважаемая «Википедия» называет рассматриваемые принцип Ферма постулатом (утверждением, не требующим доказательства), дайте словесное обоснование (не более 50 слов) принципа таутохронизма.

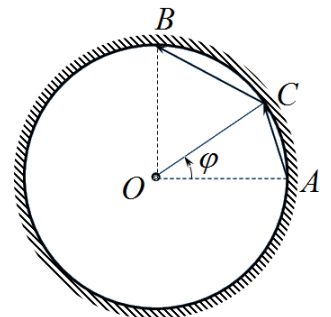
Часть 3. Принцип Ферма

Задача 3.1 Точка A находится в среде с показателем преломления n_1 , точка B в среде с показателем преломления n_2 . Луч света выходит из точки A и после преломления на плоской границе двух сред проходит через точку B .



3.1 Используя принцип Ферма получите формулу для закона преломления света.

Задача 3.2 Рассмотрим отражение света от внутренней зеркальной поверхности цилиндрической трубки радиуса R в плоскости, перпендикулярной оси трубки (см. рис). Рассмотрим все возможные траектории светового луча ACB . Точки A, B, C находятся на внутренней поверхности цилиндра. Центр сечения – точка O . Положение точки C задается углом φ . Угол $\angle AOB$ – прямой.



3.2.1 Найдите зависимость длины траектории ACB от угла φ - $L(\varphi)$. Постройте схематический график этой зависимости для всех возможных значений φ .

3.2.2 Укажите, каким значениям угла φ соответствуют истинные траектории луча. Укажите эти значения на построенном графике $L(\varphi)$.

Задача 3.3 Выводы из проделанной работы.

3.3.1 Уточните формулировку принципа Ферма, так, чтобы она описывала все рассмотренные в данном задании случаи движения луча света.

3.3.2 Дайте словесное обоснование принципа Ферма в общем случае (не более 50 слов).

Листы ответов

Задание 1. Гигантомания

Задача 1.1 Падение камушка

а) плотность падающего тела равна средней плотности Земли;

1.1.1а Время падения (формула и численное значение)

$$\tau =$$

1.1.2а Скорость падения (формула и численное значение)

$$V =$$

а) масса падающего тела равна массе Земли

1.1.1б Время падения (формула и численное значение)

$$\tau =$$

1.1.2б Скорость падения (формула и численное значение)

$$V =$$

Задача 1.2 Космический корабль.

1.2 Период обращения спутника вокруг Земли (формула и численное значение)

а) масса корабля значительно меньше массы Земли;

$$T =$$

б) масса корабля равна массе Земли.

$$T =$$

Задача 1.3 Эталон часа

1.3 Период колебаний

$$T =$$

Листы ответов

Задание 2. Магнитное динамо

1.1 Направления векторов: напряженности электрического поля $\vec{E}$, индукции магнитного поля $\vec{B}$, скорости движения $\vec{v}$ в точке, находящейся внутри слоя на оси x (рисунок)

1.2 Модуль индукции магнитного поля внутри слоя

$$B =$$

1.3 Направления сил, действующих на электрон (рисунок)

1.4 Модули сил

$$F_E =$$

$$F_B =$$

2.1 Уравнение, описывающее изменение поверхностной плотности зарядов с течением времени

2.2 «Критическая» скорость движения слоя

$$V^* = \omega^* R =$$

2.3 Длительность суток на Земле

$$T =$$

2.4 Характерное время исчезновения зарядов

$$\tau =$$

3.1 Поверхностной плотности этих зарядов

$$\sigma =$$

3.2 Индукция магнитного поля внутри слоя

$$B =$$

3.3 Описывает ли рассмотренная модель механизм возникновения магнитного поля Земли?

Листы ответов

Задание 3. Таутохронизм и принцип Ферма

2.1 Фокусное расстояние зеркала

$$f =$$

2.2 Фокусное расстояние линзы.

$$f =$$

2.3.2 «Формула вогнутого зеркала»

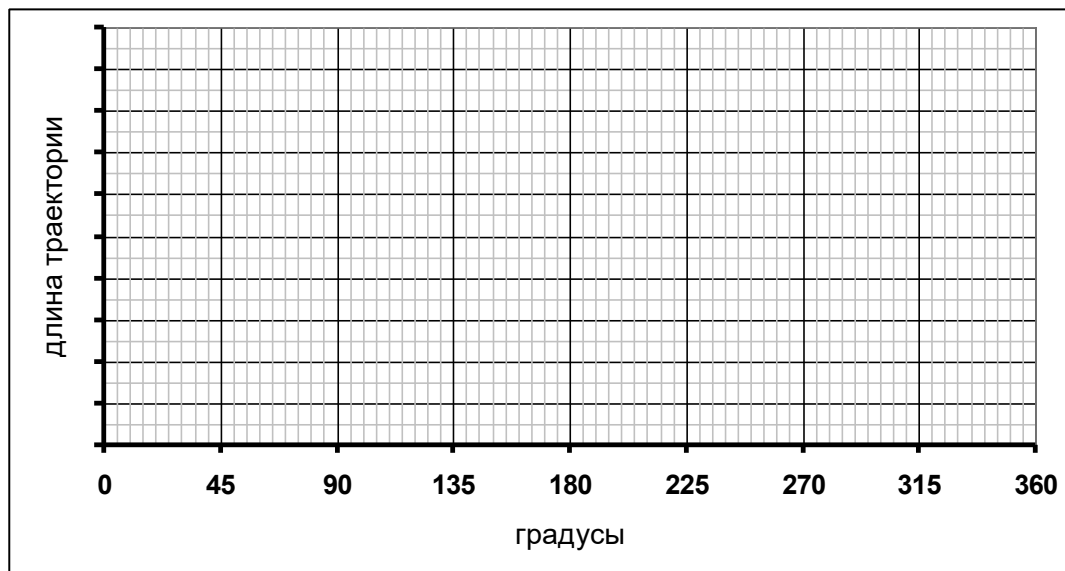
2.4.1 Модернизированный принцип таутохронизма

2.4.3 Обоснование принципа таутохронизма

3.2.1 Зависимость длины траектории от угла φ

$$L(\varphi) =$$

Схематический график зависимости



3.2.2 Каким значениям угла φ соответствуют истинные траектории луча. Укажите эти значения на построенном графике $L(\varphi)$.

3.3.1 Формулировка принципа Ферма

3.3.2 Обоснование принципа Ферма