В. И. Берник
О. Н. Пирютко

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ И БИНОМ НЬЮТОНА

Пособие для учителей учреждений общего среднего образования

Рекомендовано Научно-методическим учреждением «Национальный институт образования» Министерства образования Республики Беларусь

М о з ы р ь
«Белый Ветер»
2 0 1 6

УДК 372.851
ББК 22.1я71
Б51

Рецензенты:

кафедра высшей математики учреждения образования «Белорусский государственный аграрный технический университет» (кандидат физико-математических наук, доцент **И. М. Морозова**)

учитель математики высшей категории государственного учреждения образования «Средняя школа № 191 г. Минска» **Н. Л. Демьянович**

Берник, В. И.

Б51 Элементы комбинаторики и бином Ньютона : пособие для учителей учреждений общего среднего образования / В. И. Берник, О. Н. Пирютко. — Мозырь : Белый Ветер, 2016. — 69, [3] с.

ISBN 978-985-574-632-5.

Пособие содержит материалы для изучения раздела школьного курса математики «Элементы комбинаторики и бином Ньютона» для обучения математике на повышенном уровне в 10 классе.

Адресуется учителям математики учреждений общего среднего образования.

УДК 372.851
ББК 22.1я71

ISBN 978-985-574-632-5

Предисловие

Предлагаемое пособие адресовано учителям математики и посвящено двум разделам школьного курса математики: «Элементы комбинаторики» и «Бином Ньютона». Материал книги излагается на основе программного материала по математике за курс 5—9 классов и предназначен для организации занятий с учащимися 10 классов, изучающих математику на повышенном уровне. Структура и методический подход к изложению позволяют использовать пособие и для организации самостоятельного изучения школьниками этих интересных разделов математики. Предлагаемый подход не использует понятия теории множеств. Опора на личный практический опыт, привычные для учащихся представления о наборе, комбинации, порядке расположения объектов позволяет уменьшить количество новых терминов, связанных с ними новых понятий, рассматривать модели конструирования количества рассматриваемых наборов. Большое число заданий различных уровней сложности, приведенных в пособии, помогут учителю в уяснении деталей, а учащемуся — в сознательном усвоении тем. Дополнительные разделы предназначены для самостоятельного расширения и углубления знаний и могут быть использованы на факультативных занятиях. Значком «*» отмечены необязательные задания.

Глава 1. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Материалы для изучения темы «Элементы комбинаторики» содержат:

- краткую теоретическую справку с выводами основных формул и их иллюстрациями;
- примеры применения формул с решениями;
- контрольные вопросы, содержащие проверочные задания на знание теории и применения ее для решения задач с ответами;
- разноуровневые тесты (пять уровней) с ответами для проверки и коррекции знаний;
- разноуровневые тесты (пять уровней) с ответами для самостоятельной работы;
- дополнительные материалы для индивидуальной работы;
- разноуровневые тесты (пять уровней) с ответами для самостоятельной работы и дополнительные задачи.

1. Общие правила комбинаторики

Определение:

Комбинаторикой называется раздел математики, изучающий способы подсчета всевозможных комбинаций из некоторых элементов (объектов), составленных по определенным правилам.

Термин «комбинаторика» происходит от латинского слова «combina», что в переводе означает «сочетать», «соединять».

Правило произведения:

Если объект A может быть выбран $\boldsymbol{m}$ различными способами, причем после каждого такого выбора объект B можно выбрать $\boldsymbol{n}$ различными способами, то выбор «сначала A, а потом B» можно осуществить $m \cdot n$ способами.

Пример 1. Сколькими способами можно выбрать пару (открытку и конверт) из 4 конвертов и из 5 открыток?

Решение. Конверт может быть выбран 4 способами, после каждого выбора конверта к нему можно выбрать открытку 5 способами, следовательно, по правилу произведения открытку в конверте можно выбрать $4 \cdot 5 = 20$ способами.

Ответ: 20 способами.

Обобщение правила произведения:

Если объект A_1 может быть выбран $\boldsymbol{m_1}$ различными способами, причем после каждого выбора объекта A_1 объект A_2 может быть выбран $\boldsymbol{m_2}$ различными способами, причем после каждого выбора объектов A_1, A_2, ..., A_{k-1} объект A_k может быть выбран $\boldsymbol{m_k}$ различными способами, то выбор «сначала A_1, потом A_2, A_3, ..., A_{k-1}, A_k» можно осуществить $m_1 \cdot m_2 ... m_k$ способами.

Пример 2. Сколькими способами можно выбрать комплект из пары перчаток, шляпы и зонтика, если имеется 5 видов перчаток, 7 видов шляп и 10 видов зонтиков?

Решение. Перчатки могут быть выбраны 5 способами, после каждого выбора перчаток к ним можно выбрать шляпу 7 способами, после каждого выбора перчаток и шляпы можно выбрать зонтик 10 способами, следовательно, по правилу произведения набор из перчаток, шляпы и зонтика можно выбрать $5 \cdot 7 \cdot 10 = 350$ способами.

Ответ: 350 способами.

Правило суммы:

Если объект A может быть выбран $\boldsymbol{m}$ различными способами, а другой объект B можно выбрать $\boldsymbol{n}$ различными способами, причем ни один из способов выбора объекта A не совпадает ни с одним из способов выбора объекта B, то выбор «либо A, либо B» можно осуществить $m + n$ способами.

Замечание (правило суммы 2):

Если некоторые способы выбора объектов A и B совпадают и число совпадений равно k, то общее число различных способов выбора либо объекта A, либо B равно $m + n - k$.

Пример 3. Сколькими способами можно выбрать одну книгу из 3 детективов, 5 романов и 7 фэнтези?

Решение. По правилу сложения одну книгу можно выбрать $3 + 5 + 7 = 15$ способами.

Ответ: 15 способами.

Пример 4. В классе из 25 школьников 15 человек занимаются теннисом, 13 — туризмом, 8 — теннисом и туризмом. Остальные — плаванием. Сколько человек занимается плаванием?

Решение. По правилу сложения всего количество школьников, занимающихся туризмом или теннисом, равно $15 + 13 - 8 = 20$. Поскольку в классе 25 человек, то $25 - 20 = 5$ школьников занимаются плаванием.

Ответ: 5 человек.

Контрольные вопросы

1. Вставьте пропущенное слово: «Если объект A может быть выбран k различными способами, причем после каждого такого выбора объект B можно выбрать p различными способами, то выбор “сначала A, а потом B” можно осуществить ... способами».

а) $p + k$; б) $p - k$; в) p^k; г) $p \cdot k$.

Ответ: г.

2. Вставьте пропущенное слово: «Если объект A может быть выбран k различными способами, а другой объект B можно выбрать p различными способами, причем ни один из способов выбора объекта A не совпадает ни с одним из способов выбора объекта B, то выбор “либо A, либо B” можно осуществить ... способами».

а) $p + k$; б) $p - k$; в) $\frac{p}{k}$; г) $p \cdot k$.

Ответ: а.

3. Вставьте пропущенное слово: «Если некоторые способы выбора объектов A (p способов) и B (k способов) совпадают и число совпадений равно d, то общее число различных способов выбора либо объекта A, либо B равно...».

а) $p + k + d$; в) $p + d - k$;
б) $p - k + d$; г) $p + k - d$.

Ответ: г.

4. Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4?

а) 8; б) 4; в) 16; г) 256.

Ответ: в.

5. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4?

а) 12; б) 24; в) 81; г) 64.

Ответ: г.

6. Сколько различных наборов из трех блюд можно составить, если меню представляет 2 первых, 6 вторых и 7 третьих блюд?

а) 14; б) 28; в) 42; г) 84.

Ответ: г.

7. Сколькими способами можно выбрать согласную и гласную из слова «ремонт»?

а) 6; б) 8; в) 16; г) 64.

Ответ: б.

8. Сколькими способами можно выбрать различные пары из согласной и гласной из слова «комбинаторика»?

а) 14; б) 9; в) 42; г) 18.

Ответ: г.

9. Сколькими способами можно оклеить две комнаты обоями, если есть три различных вида обоев (комнаты могут быть оклеены одинаковыми обоями)?

а) 6; б) 3; в) 9; г) 8.

Ответ: в.

10. Сколькими способами можно оклеить две комнаты обоями, если есть три различных вида обоев (комнаты не могут быть оклеены одинаковыми обоями)?

а) 6; б) 3; в) 9; г) 8.

Ответ: а.

11. В классе из 20 школьников 12 человек занимаются шахматами, 13 — футболом, 8 — шахматами и футболом. Остальные — дзюдо. Сколько человек занимается дзюдо?

а) 13; б) 3; в) 5; г) 8.

Ответ: б.

12. Несколько человек на международной конференции из 300 участников знают китайский язык. Из всех остальных

100 знают английский и французский, 150 — английский и русский, 25 — русский, французский и английский. Сколько участников знают китайский язык?

а) 75; б) 125; в) 25; г) 50.

Ответ: а.

13. Сколько чисел среди первых 50 натуральных чисел делятся на 2 или на 3?

а) 41; б) 43; в) 33; г) 50.

Ответ: в.

14. Сколько чисел среди первых 50 натуральных чисел не делятся ни на 2, ни на 3?

а) 41; б) 9; в) 6; г) 17.

Ответ: г.

15. Сколько чисел среди первых 100 натуральных чисел не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5?

а) 26; б) 52; в) 34; г) 68.

Ответ: а.

Разноуровневые тесты

Уровень 1

1. Сколькими способами можно выбрать один цветок из 5 роз и 9 гвоздик различных цветов? Эту задачу можно решить с помощью:

а) правила произведения;
б) правила суммы;
в) обобщенного правила суммы 2;
г) двух правил — произведения и суммы.

Ответ: б.

2. Сколькими способами можно выбрать одну розу и одну гвоздику из 5 роз и 9 гвоздик различных цветов? Эту задачу можно решить с помощью:

а) правила произведения;
б) правила суммы;
в) обобщенного правила суммы 2;
г) двух правил — произведения и суммы.

Ответ: а.

3. В классе 25 человек, 15 из них занимаются спортом, а 13 человек занимаются музыкой. Сколькими способами можно выбрать спортсмена на соревнование, если в это же время проходит музыкальный конкурс? Эту задачу можно решить с помощью:

а) правила произведения;
б) правила суммы;
в) обобщенного правила суммы 2;
г) двух правил — произведения и суммы.

Ответ: в.

Уровень 2

1. Сколькими способами можно выбрать один напиток, если предлагаются 3 цитрусовых и 7 ягодных напитков?

а) 10; б) 21; в) 4; г) 49.

Ответ: а.

2. Сколькими способами можно выбрать один цитрусовый и один ягодный напиток, если предлагается 3 цитрусовых и 7 ягодных напитков?

а) 10; б) 21; в) 4; г) 49.

Ответ: б.

3. В классе 15 учащихся занимаются спортом, 11 — музыкой, 4 — спортом и музыкой. Сколько человек в классе, если три человека в классе не занимаются ни спортом, ни музыкой?

а) 27; б) 30; в) 25; г) 26.

Ответ: в.

Уровень 3

1. Сколько натуральных чисел среди первых 100, которые делятся или на 5, или на 6?

а) 26; б) 33; в) 42; г) 37.

Ответ: б.

2. Сколько чисел среди первых 100, которые делятся и на 5, и на 6?

а) 6; б) 3; в) 5; г) 30.

Ответ: б.

3. Сколькими способами можно выбрать набор из трех разных ручек, если есть 4 вида шариковых, 5 видов капиллярных и 3 вида гелевых?

а) 60; б) 3; в) 12; г) 30.

Ответ: а.

Уровень 4

1. Из 12 яблок и 10 груш выбирается один фрукт, а затем из оставшихся фруктов выбирается еще один фрукт. Сколькими способами это можно сделать?

а) 462; б) 121; в) 126; г) 218.

Ответ: а.

2. Сколькими способами можно составить код, содержащий одну из букв a, b, c, d и одну из цифр 1, 2, 3, 4, 5?

а) 20; б) 9; в) 625; г) 40.

Ответ: а.

3. Сколько «слов» длины 4 можно составить из 33 букв русского алфавита?

а) 33^4; б) $33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30$; в) 32^4; г) 132.

Ответ: а.

Уровень 5

1. Сколько неудачных попыток можно сделать, открывая замок, код которого состоит из трех различных цифр?

а) 720; б) 719; в) 17; г) 999.

Ответ: б.

2. Сколькими способами можно составить команду от класса из трех учеников на соревнование по трем различным видам спорта, если в классе 21 человек?

а) 60; б) 7980; в) 499; г) 4990.

Ответ: б.

3. Сколько «слов» длины 4 можно составить из 33 букв русского алфавита так, чтобы любые две соседние буквы не были одинаковыми?

а) 33^4; б) $33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30$; в) $33 \cdot 32 \cdot 32 \cdot 32$; г) 132.

Ответ: в.

2. Вычисление числа перестановок. Перестановки без повторений

Определение:

Перестановками из n различных элементов называются соединения (наборы), каждое(ый) из которых содержит эти n элементов, взятых в определенном порядке.

Замечание 1. Перестановкой из n элементов можно считать установленный в конечном множестве порядок.

Обозначение:

Число всех перестановок из n элементов обозначается P_n (от французского слова «permutation» — перестановка).

Замечание 2. Различные перестановки из n данных элементов отличаются друг от друга только порядком расположения элементов.

Выведем формулу для подсчета числа перестановок из n элементов.

Вывод формулы:

Пусть имеется n различных элементов, которые нужно распределить по n местам. Выбор первого элемента можно осуществить n способами (иначе говоря, на первое место можно поставить любой из n элементов).

После выбора первого элемента второй элемент можно выбрать $(n-1)$ способом (на второе место можно поставить любой из оставшихся элементов, их осталось $(n-1)$), третий элемент можно выбрать $(n-2)$ способами и т. д. Последний элемент — одним способом.

По правилу произведения n элементов можно выбрать $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot\ldots\cdot 1$ способом, т. е. число способов равно произведению всех натуральных чисел от 1 до n.

Для такого произведения применяют специальное обозначение: $n!$ (читается «эн факториал»).

Например, $2!=1\cdot 2$, $3!=1\cdot 2\cdot 3$,

$10!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10=3628800$.

Таким образом, число перестановок из n элементов равно $P_n=n!$

Пример. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр 3, 5, 7, 9 так, чтобы все цифры были различными?

Решение. Так как каждое число будет отличаться от других только порядком расположения цифр, то количество чисел, составленных из указанных цифр, будет равно числу перестановок из 4 элементов. По формуле числа перестановок из n элементов будем иметь: $P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Ответ: 24 числа.

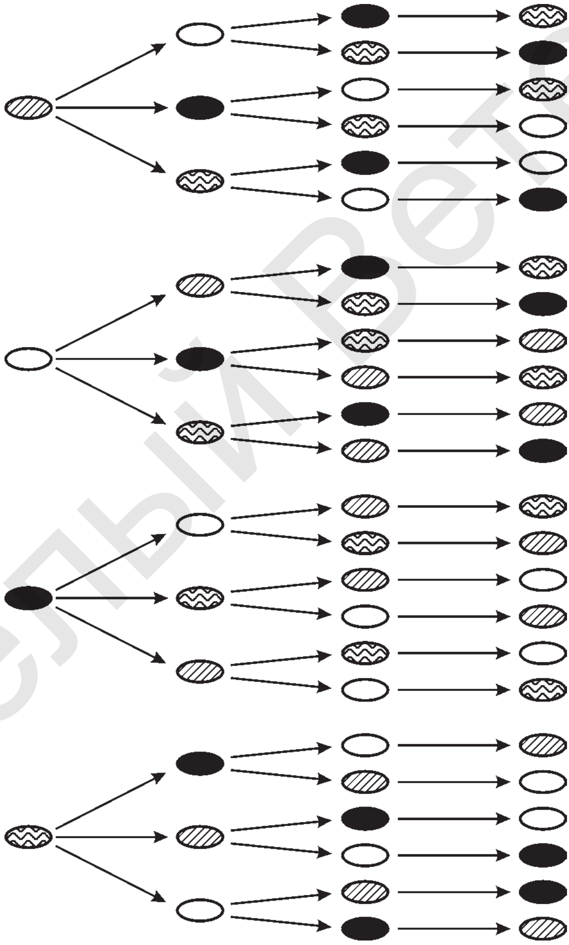


Рис. 1

На рисунке 1 показано, как получить перестановки из четырех различных элементов:

на первое место можно поставить любой из четырех элементов (первый столбик);

на второе — любой из оставшихся трех (от каждого выбранного элемента проведены три стрелки);

на третье — любой из оставшихся двух (от каждого второго выбранного элемента проведены две стрелки);

на четвертое — оставшийся один элемент (от каждого третьего элемента проведена одна стрелка).

Всего комбинаций будет $P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Контрольные вопросы

1. Упростите выражение $\frac{7!\,4!}{10!}\left(\frac{8!}{3!\,5!} - \frac{9!}{2!\,7!}\right)$.

а) $\frac{3}{2}$; б) $\frac{2}{3}$; в) 30; г) 15.

Ответ: б.

2. Упростите выражение $\frac{5!}{m(m+1)} \cdot \frac{(m+1)!}{(m-1)!\,4!}$.

а) $4m$; б) $5m$; в) 15; г) 5.

Ответ: г.

3. Число перестановок из n элементов без повторений вычисляется по формуле:

а) $P_n = n^2$; в) $P_n = n(n-1)$;

б) $P_n = n!$; г) $P_n = n^n$.

Ответ: б.

4. Результат вычисления $\frac{P_6}{P_4}$ равен:

а) $\frac{3}{2}$; б) 5; в) 30; г) 15.

Ответ: в.

5. Результат вычисления $\frac{P_8 - P_7}{P_6}$ равен:

а) 7; б) 49; в) 3; г) 56.

Ответ: б.

6. Результат вычисления $\dfrac{P_m - P_{m-1}}{P_{m-2}}$ равен:

а) $m-1$; б) $m(m-1)$; в) $(m-1)^2$; г) $m-3$.

Ответ: в.

7. Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 3, 5, 7 так, чтобы все цифры участвовали в записи?

а) 3; б) 105; в) 6; г)15.

Ответ: в.

8. Сколькими способами 6 человек могут сесть на 6 стульев?

а) 3; б) 105; в) 720; г) 15.

Ответ: в.

9. Сколькими способами могут расположиться в турнирной таблице 10 футбольных команд, если известно, что никакие две команды не набрали поровну очков?

а) $10!$; б) 10; в) 20; г) 50.

Ответ: а.

10*. Сколькими способами можно составить расписание на один день из шести уроков из шести различных предметов, если один из предметов (математика) должен быть первым уроком?

а) $5!$; б) $6!$; в) 6; г) 5.

Ответ: а.

11. Сколько различных «слов» можно составить из слова «правило», переставляя буквы так, чтобы буква *п* оставалась на первом месте?

а) $6!$; б) $7!$; в) 35; г) 7.

Ответ: а.

12. Сколько различных «слов» можно составить из слова «период», переставляя буквы так, чтобы гласные стояли рядом?

а) 144; б) 24; в) 120; г) 12.

Ответ: а.

13. Сколько различных «слов» можно получить, переставляя буквы в слове «алгоритм» так, чтобы гласные не стояли рядом?

а) 1360; б) $6!$; в) 3600; г) $8!$.

Ответ: в.

14. Расписание одного дня содержит 6 уроков. Определить количество таких расписаний при выборе из 6 различных предметов, если по каждому предмету должен быть урок.

а) 6; б) 12; в) 36; г) 720.

Ответ: г.

15*. Расписание одного дня содержит 6 уроков. Определить количество таких расписаний при выборе из 5 различных предметов, если из этих 6 уроков в расписании должно быть два урока физкультуры пятым и шестым уроками?

а) 120; б) 24; в) 360; г) 720.

Ответ: б.

16*. Сколько различных перестановок можно составить из чисел 1, 2, 3, ..., 16 так, чтобы четные числа стояли на четных местах, а нечетные — на нечетных?

а) 16; б) $16!$; в) $(8!)^2$; г) 8.

Ответ: в.

17*. Сколькими различными способами можно рассадить за круглый стол 8 женщин и 8 мужчин так, чтобы никакие женщины не сидели рядом?

а) 16; б) $16!$; в) $2(8!)^2$; г) 8.

Ответ: в.

Разноуровневые тесты

Уровень 1

1. Верно ли, что значение 5! равно:

а) 25; б) 5^5; в) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$; г) 2^5?

Ответ: в.

2. Число перестановок из пяти элементов P_5 равно:

а) 25; б) 5^5; в) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$; г) 2^5.

Ответ: в.

3. Число различных трехцветных флагов, которые можно составить, используя синий, белый и красный цвета, равно:

а) числу перестановок из трех элементов;
б) сумме всех цветов;
в) 3;
г) 5.

Ответ: а.

Уровень 2

1. Результат вычисления $\dfrac{P_{17}}{P_{15}}$ равен:

а) 272; б) 33; в) $\dfrac{1}{272}$; г) $\dfrac{1}{17}$.

Ответ: а.

2. Результат вычисления $\dfrac{P_{81} - P_{79}}{P_{81}}$ равен:

а) 79; б) $\dfrac{6479}{6480}$; в) $\dfrac{6480}{6479}$; г) $\dfrac{79}{80}$.

Ответ: б.

3. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр 1, 5, 8, 9 так, чтобы все цифры участвовали в записи?

а) 4; б) 720; в) 24; г) 23.

Ответ: в.

Уровень 3

1. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 0 так, чтобы все цифры участвовали в записи?

а) 24; б) 18; в) 4; г) 15.

Ответ: б.

2. Сколько различных четных четырехзначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 0 так, чтобы все цифры участвовали в записи?

а) 24; б) 18; в) 6; г) 12.

Ответ: в.

3. Сколько различных нечетных четырехзначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 7, 8 так, чтобы все цифры участвовали в записи?

а) 24; б) 18; в) 6; г) 12.

Ответ: б.

Уровень 4

1. Сумма цифр во всех пятизначных числах, составленных из цифр 1, 2, 3, 4, 5 (цифры в числе не повторяются), равна:

а) 120; б) 180; в) 1800; г) 150.

Ответ: в.

2. Сколькими способами можно расставить на полке 10 различных книг, если среди них три различных справочника должны стоять вместе?

а) $10!$; б) $8!$; в) 13; г) $8!\cdot 3!$.

Ответ: г.

3. Сколько различных сигналов из 9 различных символов можно передать так, чтобы четыре определенных символа были или первыми, или последними?

а) 240; б) 2880; в) 5760; г) $9!$.

Ответ: в.

Уровень 5

1*. Сумма всех пятизначных чисел, составленных из цифр 1, 4, 6, 7, 8 (цифры в числе не повторяются), равна:

а) 6933264; б) 3120; в) 12720; г) 150.

Ответ: а.

2. Сколько различных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, которые начинаются с цифр 1, 2, 3, взятых в указанном порядке (цифры не повторяются)?

а) 24; б) 120; в) 20; г) 360.

Ответ: а.

3. Сколькими способами можно составить пятизначное число из цифр 1, 2, 4, 5 так, чтобы в нем было две цифры 5, а цифры 1 и 2 стояли рядом?

а) 24; б) 18; в) 12; г) 120.

Ответ: а.

3. Вычисление числа размещений. Размещения без повторений

Определение:

Размещениями из n различных элементов по m называются соединения (наборы), каждое(ый) из которых содержит m элементов из n, взятых в определенном порядке.

Размещения из n различных элементов по m отличаются друг от друга элементами или порядком их расположения.

Обозначение:

Число всех размещений из n элементов по m обозначается A_n^m (от французского слова «arangent» — размещение, приведение в порядок).

Вывод формулы:

Число всех размещений из n различных элементов по m можно вычислить по формуле:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1).$$

Выбор первого элемента можно осуществить n способами (иначе говоря, на первое место можно поставить любой из n элементов).

После выбора первого элемента второй элемент можно выбрать $(n-1)$ способом, на второе место можно поставить любой из оставшихся $(n-1)$ элементов, третий элемент можно выбрать $(n-2)$ способами и т. д., m-й элемент — $(n-m+1)$ способом.

По правилу произведения m элементов из n можно выбрать $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)$ способами, т. е. число способов равно произведению всех натуральных чисел от наибольшего n до наименьшего $(n-m+1)$.

Формулу $A_n^m = n(n-1)(n-2)n(n-m+1)$ можно преобразовать:

$$A_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)(n-m)(n-m-1)\ldots1}{(n-m)!} = \frac{n!}{(n-m)!}$$

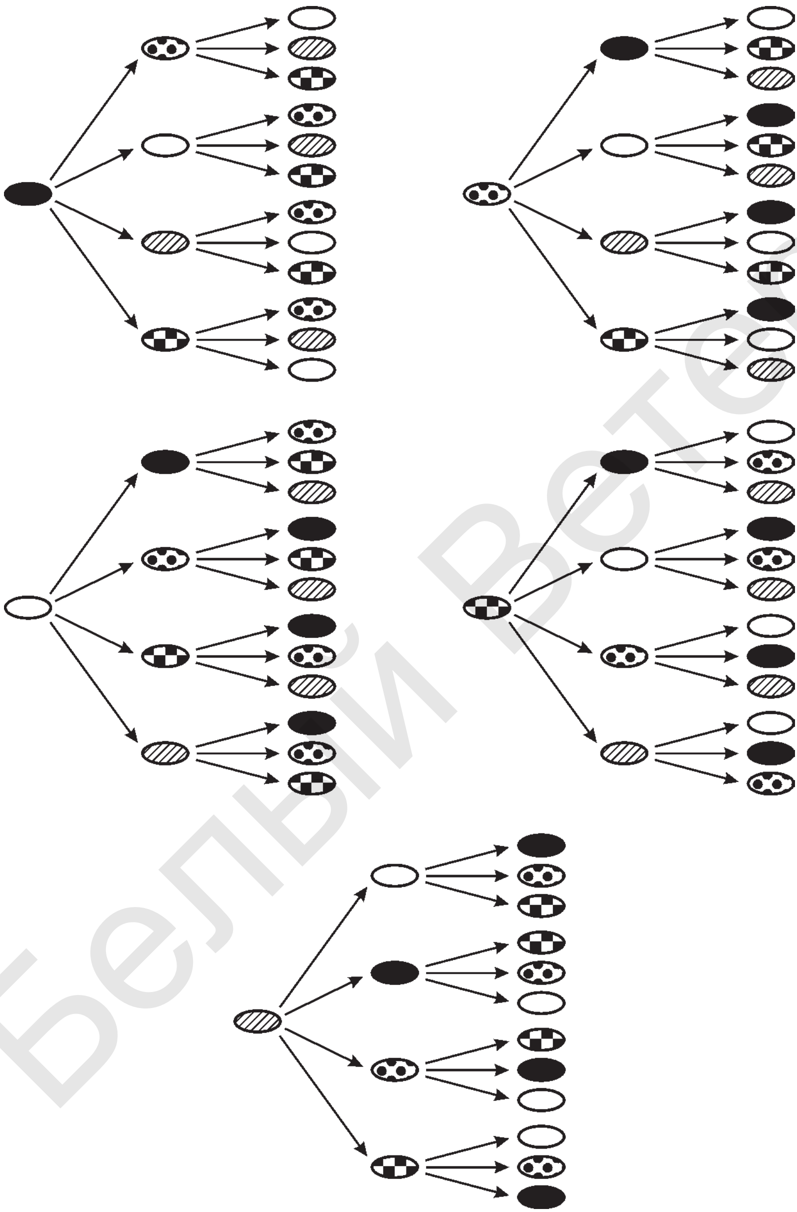


Рис. 2

На рисунке 2 показано, как получить размещения из пяти различных элементов по три:

на первое место в наборе можно поставить любой из пяти элементов (первый столбик состоит из пяти строк);

на второе место — любой из четырех оставшихся элементов, т. е. от каждого элемента первого столбика проведены четыре стрелки (второй столбик). Количество выбранных пар равно $5 \cdot 4$.

на третье место — любой из оставшихся трех элементов, т. е. от каждого элемента проведены три стрелки.

Всего наборов (троек) из пяти элементов по три равно $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3$.

Пример. Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 7, 9 так, чтобы все цифры были различными?

Решение. Так как каждое число будет отличаться от другого только порядком расположения цифр или самими цифрами, то количество трехзначных чисел, составленных из указанных цифр, будет равно числу размещений из 5 элементов по 3. По формуле числа размещений из n элементов по m будем иметь: $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Ответ: 60 чисел.

Контрольные вопросы

1. Упростите выражение $\dfrac{A_5^2}{A_6^4}$.

а) 0,5; б) 4,05; в) $\dfrac{1}{18}$; г) 18.

Ответ: в.

2. Упростите выражение $\dfrac{5!}{A_5^2} \dfrac{2!}{4!}$.

а) 4; б) 5; в) 0,5; г) 2.

Ответ: в.

3. Число размещений из n элементов по m без повторений вычисляется по формуле:

а) $A_n^m = n^m$;

б) $A_n^m = n!$;

в) $A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)$;
г) $A_n^m = m^n$.
Ответ: в.

4. Результат вычисления $\dfrac{A_n^{m+1}}{A_n^m}$ равен:

а) $m+1$; б) m; в) $n-m$; г) $n-m+1$.
Ответ: в.

5. Результат вычисления $\dfrac{(A_n^{m+2} - A_n^{m+1})}{A_n^m}$ равен:

а) $(m+1)(n-m)$;
б) $(n-m+2)(m+1)$;
в) $(n-m)(n-m-2)$;
г) $(n-m+1)(n-m)$.
Ответ: в.

6. Число размещений из $n > 8$ элементов по 8 без повторений вычисляется по формуле:

а) $A_n^8 = n!$;
б) $A_8^n = n!$;
в) $A_n^8 = n(n-1)(n-2)\ldots(n-7)$;
г) $A_n^8 = n(n-1)(n-2)\ldots(n-8)$.
Ответ: в.

7. Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 5, 7, 8 (цифры в числе не могут повторяться)?

а) 36; б) 120; в) 27; г) 216.
Ответ: б.

8. Сколькими способами можно назначить трех тьютеров из 16 старшекурсников для трех студентов первого курса?

а) 12; б) 48; в) $16!$; г) 3360.
Ответ: г.

9. Результат упрощения выражения $\dfrac{A_6^3}{4!}$ равен:

а) 8; б) 0,125; в) 0,04; г) 2.
Ответ: б.

10. Результат упрощения выражения $\dfrac{P_4}{A_6^4}$ равен:

а) $\dfrac{1}{5}$; б) $\dfrac{1}{15}$; в) 4; г) 2.
Ответ: б.

11. Верно ли, что A_n^m равно:

а) n^m; в) $n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)$;

б) $\dfrac{n!}{m!}$; г) m^n?

Ответ: в.

12. Из 25 школьников выбирают пять для участия в соревнованиях по пяти видам плавания. Сколькими способами можно организовать команду пловцов?

а) 6000; б) $\dfrac{25!}{20!}$; в) $25 \cdot 24 \cdot \ldots \cdot 21$; г) 600.

Ответ: б, в.

13. Студентам нужно сдать 5 экзаменов за 11 дней. Сколько различных расписаний можно составить?

а) 5^{11}; б) 11^5; в) $\dfrac{11!}{6!}$ г) 55.

Ответ: в.

14. Сколько можно составить различных четных пятизначных номеров, составленных из цифр 2, 3, 5, 7, 9 (цифры не повторяются)?

а) 5^4; б) 4^5; в) 20; г) 24.

Ответ: г.

15. В соревнованиях участвуют 17 команд. Сколькими способами могут быть распределены между командами золотая, серебряная и бронзовая медали?

а) 51; б) $\dfrac{17!}{3!}$; в) $17 \cdot 16 \cdot 15$; г) 20.

Ответ: в.

Разноуровневые тесты

Уровень 1

1. Сколькими способами можно выбрать председателя, секретаря и одного члена жюри из семнадцати учащихся класса? Задачу можно решить по формуле:

а) числа перестановок из трех элементов;

б) числа размещений из семнадцати элементов по три;

в) числа перестановок из семнадцати элементов;
г) числа перестановок из двадцати элементов.

Ответ: б.

2. Сколькими способами можно выбрать три книги для призов за первое, второе и третье место в олимпиаде из 10 различных книг? Задачу можно решить по формуле:

а) числа перестановок из трех элементов;
б) числа размещений из десяти элементов по три;
в) числа перестановок из десяти элементов;
г) числа перестановок из тринадцати элементов.

Ответ: б.

3. Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 (цифры в числе не могут повторяться)? Задачу можно решить по формуле:

а) числа размещений из четырех элементов по три;
б) числа перестановок из трех элементов;
в) числа перестановок из четырех элементов;
г) числа перестановок из восьми элементов.

Ответ: а.

Уровень 2

1. Сколько различных четырехцветных флагов из четырех различных горизонтальных полос можно получить, если можно использовать 5 цветов?

а) 20; б) 120; в) 60; г) 720.

Ответ: б.

2. Сколько различных четырехцветных флагов из четырех различных горизонтальных полос можно получить, если можно использовать 5 цветов, при этом два из этих цветов (синий и красный) должны быть рядом?

а) 24; б) 72; в) 60; г) 48.

Ответ: г.

3. Сколько различных четырехцветных флагов из четырех горизонтальных полос можно получить, если можно использовать 5 цветов, при этом два из этих цветов (синий и красный) не должны быть рядом?

а) 20; б) 72; в) 60; г) 720.

Ответ: б.

Уровень 3

1*. Сколькими способами можно распределить 5 различных рыб между четырьмя рыбаками?

а) 20; б) 625; в) 1024; г) 120.

Ответ: в.

2. Сколько различных узоров из 5 различных мозаичных плиток, расположив их в ряд, можно получить, если имеется 9 их видов?

а) 9^5; б) 5^9; в) 45; г) $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$.

Ответ: г.

3. Сколько неудачных попыток можно сделать, чтобы открыть замок, если код содержит 4 цифры из 10, при этом цифры не могут повторяться?

а) 10; б) $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 - 1$; в) 10000; г) 9999.

Ответ: б.

Уровень 4

1. Сколькими способами можно составить расписание из 6 различных уроков на один день, если имеется 10 предметов и один из них (физкультура) должен быть последним?

а) 10^6; б) 5^9; в) $\dfrac{9!}{4!}$; г) $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$.

Ответ: в, г.

2. У филателиста 9 новых марок. Сколькими способами он может наклеить четыре из них на 4 пронумерованных места?

а) 9^4; б) 4^9; в) $\dfrac{9!}{5!}$; г) $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$.

Ответ: в, г.

3*. Сколькими способами можно составить расписание из 6 уроков на один день, если имеется 10 предметов и один из них (физкультура) должен быть последним?

а) 10^6; б) 9^5; в) $\dfrac{9!}{5!}$; г) $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$.

Ответ: б.

Уровень 5

1*. Сколько различных кодов из 7 различных символов можно составить, если код может содержать больше 3 и меньше 6 символов?

а) 63; б) $7 \cdot 6 \cdot 5$; в) $7^4 + 7^5$; г) $3^7 + 4^7 + 5^7$.

Ответ: в.

2*. Сейф открывается при помощи кода, состоящего из 5 цифр из 10 и следующих за ними трех букв из 33. Сколько неудачных попыток можно сделать, чтобы открыть сейф?

а) $33 \cdot 10^5$; б) $33^3 \cdot 10^5$; в) $\frac{33!}{30} \cdot \frac{10!}{5!}$; г) $33^3 \cdot 10^5 - 1$.

Ответ: г.

3*. Сейф открывается при помощи кода, состоящего из 5 цифр из 10 и следующих за ними трех букв из 33. Сколько неудачных попыток можно сделать, чтобы открыть сейф, если первая цифра известна?

а) $33 \cdot 10^4$; б) $33^3 \cdot 10^4 - 1$; в) $\frac{33!}{30} \cdot \frac{10!}{5!}$; г) $3^{32} \cdot 4^{10} - 1$.

Ответ: б.

4. Вычисление числа сочетаний. Сочетания без повторений

Определение:

Сочетаниями из *n* различных элементов по *m* называются соединения (наборы), каждое(ый) из которых содержит *m* элементов из *n*.

Сочетания из *n* различных элементов по *m* отличаются друг от друга только элементами. Порядок следования элементов не учитывается.

Обозначение:

Число всех сочетаний из *n* элементов по *m* обозначается C_n^m (от французского слова «combination» — сочетание).

Число всех сочетаний из *n* различных элементов по *m* можно вычислить по формуле:

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-m+1)}{m!}$$

или

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Заметим, что $C_n^0 = C_n^n = 1$.

Вывод формулы:

Формулу числа сочетаний можно получить, используя связь между сочетаниями из n элементов по m и размещениями из n элементов по m. Действительно, чтобы образовать упорядоченное соединение, содержащее m элементов из n данных, можно:

1) выделить какие-либо m элементов из n данных, что можно сделать C_n^m способами;

2) в выделенных m элементах установить порядок, что можно сделать P_m способами. Всего получим $C_n^m \cdot P_m$ способов выбора m упорядоченных множеств из n элементов, т. е.

$A_n^m = C_n^m \cdot P_m$, откуда $C_n^m = \dfrac{A_n^m}{P_m} = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}$.

Эту формулу можно записать иначе, умножив числитель и знаменатель дроби на $(n-m)!$:

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)(n-m)(n-m-1)\ldots 2\cdot 1}{m!(n-m)!} =$$

$$= \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Пример. Сколькими способами можно выбрать троих дежурных из 20 человек в классе?

Решение. Так как способы выбора различаются только лишь элементами, порядок не существенен, то рассматриваются сочетания из 20 элементов по 3. Число сочетаний вычислим по формуле $C_{20}^3 = \dfrac{20!}{3!17!} = \dfrac{18\cdot 19\cdot 20}{1\cdot 2\cdot 3} = 1140$.

Ответ: 1140 способов.

Некоторые свойства числа сочетаний

1. $C_n^m = C_n^{n-m}$.

Доказательство следует из формулы:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = C_n^{n-m}.$$

2. $C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$.

Доказательство:

$$C_n^m + C_n^{m+1} = \frac{n!}{(n-m)!\,m!} + \frac{n!}{(n-m-1)!\,(m+1)!} =$$

$$= \frac{n!(m+1) + n!(n-m)}{(n-m)!\,(m+1)!} = \frac{n!(n+1)}{(n-m)!\,(m+1)!} =$$

$$= \frac{(n+1)!}{(n-m)!\,(m+1)!} = C_{n+1}^{m+1}.$$

Пользуясь этой формулой, можно вычислять число сочетаний из n элементов, зная число сочетаний из $(n-1)$-го элемента.

3. $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

Доказательство:

Поскольку сочетаниями из n различных элементов по m называются соединения, каждое из которых содержит m элементов из n, то их можно рассматривать как подмножества из m элементов данного множества, состоящего из n элементов.

Тогда свойство 3 можно рассматривать как следствие теоремы: **«Число всех подмножеств множества, содержащего n элементов, равно 2^n».**

Доказательство проведем методом математической индукции:

1. При $n = 1$ утверждение верно, так как множество, состоящее из одного элемента, имеет два подмножества: само это множество и пустое множество.

2. Покажем, что из $A(k)$ следует $A(k+1)$, где

$$A(k):\ C_k^0 + C_k^1 + \ldots + C_k^k = 2^k.$$

Или иначе: из того, что множество, состоящее из k элементов, содержит 2^k подмножеств, следует, что множество, состоящее из $(k+1)$ элемента, содержит 2^{k+1} подмножеств.

Рассмотрим множество, состоящее из $(k+1)$ элемента, $\{a_1, a_2, \ \dots, a_{k+1}\}$, и множество, состоящее из k его элементов, $\{a_1, a_2, \ \dots, a_k\}$. По предположению множество $\{a_1, a_2, \ \dots, a_k\}$ имеет 2^k различных подмножеств, они же являются и подмножествами множества $\{a_1, a_2, \ \dots, a_{k+1}\}$.

Кроме того, все остальные подмножества последнего множества получаются добавлением к каждому из имеющихся 2^k еще одного элемента a_{k+1}. Таким образом, число всех подмножеств множества, содержащего $(k+1)$ элемент, будет равно $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$.

На основании принципа математической индукции утверждение верно для любого натурального n.

Заметим, что для $n = 0$ теорема также верна, поскольку пустое множество содержит единственное подмножество — само себя, т. е. $C_n^0 = 2^0 = 1$.

Таким образом, утверждение верно для $n = 0$ и натуральных n.

Замечание. Это свойство можно доказать, пользуясь формулой бинома Ньютона (см. часть 2).

Для этого достаточно в формулу

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \dots + C_n^m a^{n-m} b^m + \dots C_n^n a^0 b^n$$

подставить $a = b = 1$.

Контрольные вопросы

1. Упростите выражение $C_{25}^{23} - C_{15}^{13} - 3C_{10}^{7}$.

а) -50; б) 40; в) 100; г) -165.

Ответ: г.

2. Упростите выражение $C_{150}^{40} - C_{150}^{110}$.

а) 125; б) 500; в) 0; г) 20.

Ответ: в.

3. Число сочетаний из n элементов по m без повторений вычисляется по формуле:

а) $C_n^m = n^m$;   в) $C_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)$;

б) $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$;   г) $C_n^m = m^n$.

Ответ: б.

4. Сколькими способами можно составить команду из четырех человек для соревнований по плаванию из 7 пловцов?

а) 70;   б) 35;   в) 28;   г) 21.

Ответ: б.

5. Результат вычисления $\dfrac{C_n^{(m+1)}}{C_n^m}$ равен:

а) $m+1$;   б) $\dfrac{m}{n-m}$;   в) $\dfrac{n-m}{m}$;   г) $(n-m)(m+1)$.

Ответ: г.

6. Результат вычисления $\dfrac{C_n^{m+2} - C_n^{m+1}}{C_n^m}$ равен:

а) $\dfrac{(n-m)(n-2m-3)}{(m+1)(m+2)}$;   в) $\dfrac{1}{(n-m)(n-m-2)}$;

б) $\dfrac{n-m+2}{m+1}$;   г) $\dfrac{m+1}{n-m}$.

Ответ: а.

7. Сколько существует разносторонних треугольников, длины сторон которых принимают следующие значения: 4, 5, 6, 7?

а) 12;   б) 20;   в) 4;   г) 6.

Ответ: в.

8. Выражение $C_8^7 + C_8^6$ равно:

а) C_8^8;   б) C_9^7;   в) C_9^8;   г) C_9^6.

Ответ: б.

9. Результат упрощения выражения $C_{100}^{97} + C_{100}^{98}$ равен:

а) 166650;   б) 1665;   в) 1650;   г) 166.

Ответ: а.

10. Результат упрощения выражения

$$C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 \text{ равен:}$$

а) 24; б) 32; в) 16; г) 6.

Ответ: б.

11. Результат упрощения выражения

$$C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + \ldots + C_m^m \text{ равен:}$$

а) m; б) m^m; в) $2m$; г) 2^m.

Ответ: г.

12. Выражение $C_{k-1}^{k-2} + C_{k-1}^{k-1}$ равно:

а) $k-1$; б) k; в) $k-2$; г) $(k-1)k$.

Ответ: б.

13*. Сколько можно составить наборов из трех сортов конфет, если в наборе должно быть 12 конфет?

а) 177; б) 169; в) 91; г) 166.

Ответ: в.

14. Сколькими способами можно выбрать 6 школьников из 12 для участия в конференции?

а) 92; б) 924; в) 91; г) 169.

Ответ: б.

Разноуровневые тесты

Уровень 1

1. В классе 25 учеников. Сколькими способами можно выбрать из них троих дежурных? Задачу можно решить по формуле:

а) числа перестановок из трех элементов;
б) числа из 25 элементов по три;
в) числа перестановок из 25 элементов;
г) числа сочетаний из 25 элементов по три.

Ответ: г.

2. Вычислить значение $C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5$ можно с помощью формулы:

а) $C_n^m = C_n^{n-m}$; в) $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$;
б) $C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$; г) $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.
Ответ: в.

3. Значение выражения $C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5$ равно:
а) 25; б) 2^6; в) 2^5; г) 5^2.
Ответ: в.

Уровень 2

1. В классе 25 учащихся. Сколькими способами можно выбрать из них четырех делегатов на конференцию?
а) $25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22$; б) 4^{25}; в) 100; г) $25 \cdot 23 \cdot 22$.
Ответ: а.

2. Вычислите: $C_5^0 + C_5^2 + C_5^3$.
а) 24; б) 64; в) 32; г) 21.
Ответ: г.

3. Результат упрощения выражения $\dfrac{3}{2(2n-1)} C_{2n}^{2n-3}$ равен:
а) $n(n-1)$; б) $2n$; в) n; г) $n-1$.
Ответ: а.

Уровень 3

1. Сколько плоскостей можно провести через 10 точек пространства, из которых никакие четыре не лежат в одной плоскости, если каждая плоскость проходит через три данные точки?
а) 60; б) 3^{10}; в) 120; г) 10^3.
Ответ: в.

2. Решения неравенства $C_n^5 < C_n^3$ — это числа:
а) 1, 2, 3; б) 6, 5, 4; в) 5, 6, 7; г) 6, 7.
Ответ: в.

3. Корень уравнения $\dfrac{3}{2(2n-1)} C_{2n}^{2n-3} = 20$ равен:
а) 5; б) 4; в) 3; г) 6.
Ответ: а.

Уровень 4

1. В подразделении 60 солдат и 5 офицеров. Сколькими способами можно выбрать из них четырех солдат и двух офицеров для несения караула?

а) 385; в) $57 \cdot 58 \cdot 59$;
б) $25 \cdot 57 \cdot 58 \cdot 59$; г) $2 \cdot 60^4$.

Ответ: б.

2. Решение неравенства $C_{15}^{k-2} > C_{15}^{k}$ — это числа:

а) 10, 11, 12, 13, 14, 15; в) 15;
б) 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15; г) 6, 7, 8, 9, 10.

Ответ: б.

3*. Сколькими способами можно разложить 8 одинаковых шаров по трем различным ящикам?

а) 24; б) 45; в) 90; г) 56.

Ответ: б.

Уровень 5

1. В лаборатории 10 физиков и 6 химиков. Сколькими способами можно составить две рабочие группы? Первая должна содержать 3 физика и 2 химика, вторая — 5 физиков и 3 химика.

а) $\frac{10!}{4!}$; б) $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$; в) $\frac{10!}{3!}$; г) $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5$.

Ответ: а.

2. Решение неравенства $C_{19}^{k-1} < C_{19}^{k}$ — это числа:

а) 1, 2, 3, 4, 5; в) 15;
б) 9, 10, 11, 12; г) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

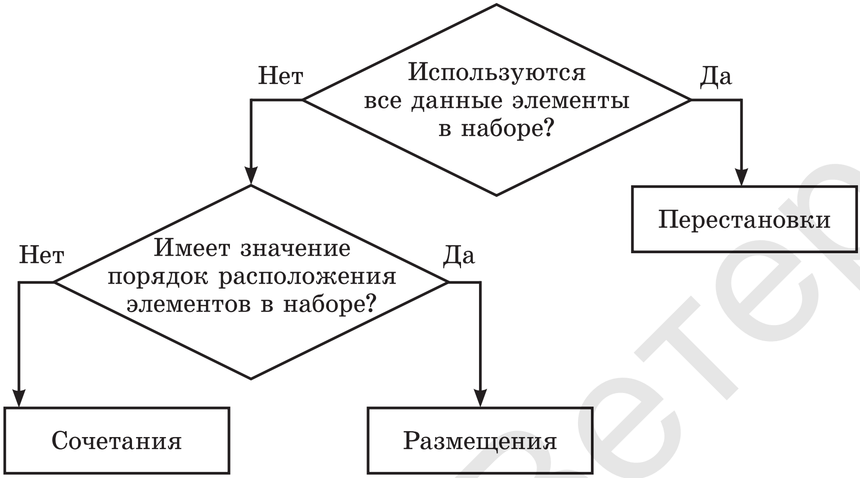
Ответ: г.

3. У филателиста 10 различных марок о хоккее и 8 различных марок о футболе. Сколькими способами он может наклеить 3 марки первого вида и 3 марки второго вида на 6 пронумерованных мест?

а) $C_{10}^{3}C_{8}^{3}$; б) $C_{10}^{3}C_{8}^{3}6!$; в) $C_{10}^{6}C_{8}^{6}$; г) 480.

Ответ: б.

Алгоритм выбора вида соединения



5. Дополнительный материал

Перестановки с повторениями

Если некоторые из n элементов множества равны, т. е. $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$, то число перестановок из n элементов равно: $\overline{P_n}(n_1, n_2, \ldots n_k) = \dfrac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}$.

Рассмотрим перестановку из n элементов, среди которых некоторые одинаковые, пусть таких n_1 — одинаковых. Тогда при перестановке этих n_1 элементов между собой перестановка из n элементов останется той же, а число всех перестановок из n элементов уменьшится во столько раз, сколькими способами можно переставить n_1 элементов, т. е. в $n_1!$ раз. Аналогично рассмотренному: если среди n элементов есть еще n_2 — одинаковых, то число всех перестановок из n элементов уменьшится в $n_2!$ раз и т. д. Таким образом, общее число перестановок из n элементов с повторениями вычисляется по формуле:

$$\overline{P_n}(n_1, n_2, \ldots n_k) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}.$$

Пример. Сколько различных «слов» можно составить из слова «задача»?

Решение. Всего в этом слове 6 букв, из них 3 — одинаковых. Тогда число перестановок из этих букв равно:

$$\overline{P_6} = \frac{6!}{3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120.$$

Контрольные вопросы

1. Число перестановок из n элементов с повторениями вычисляется по формуле:

а) $P_n(n_1, n_2, \ldots n_k) = \dfrac{n!}{n_1! + n_2! + \ldots + n_k!}$;

б) $\overline{P_n}(n_1, n_2, \ldots n_k) = \dfrac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}$;

в) $P_n(n_1, n_2, \ldots n_k) = \dfrac{n!}{k!}$;

г) $\overline{P_n}(n_1, n_2, \ldots n_k) = \dfrac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}$.

Ответ: б.

2. Сколько различных «слов» можно составить из слова «повтор», переставляя буквы?

а) $5!$; б) $4!$; в) 360; г) 720.

Ответ: в.

3. Сколько различных «слов» можно составить из слова «размещения», переставляя буквы?

а) 907200; б) 15012; в) 5120; г) 12020.

Ответ: а.

4. Сколько различных «слов» можно получить, переставляя буквы в слове «параллелепипед»?

а) $14!$; б) $\dfrac{14!}{3! \cdot 2!}$; в) $\dfrac{14!}{3!} \cdot 2! \cdot 3! \cdot 3!$; г) $14 \cdot 13 \cdot 12$.

Ответ: в.

5. Расписание одного дня содержит 6 уроков. Определить количество таких расписаний, если из этих 6 уроков в расписании должно быть два урока физкультуры, два урока математики, один урок физики и один урок химии.

а) 30; б) 125; в) 180; г) 720.

Ответ: в.

6. Сколько различных «слов» можно составить из слова «пример», переставляя буквы?

а) $5!$; б) $4!$; в) 360; г) 720.

Ответ: в.

Размещения с повторениями

Определение:

Размещения из n элементов, в каждое из которых входит m элементов, причем один и тот же элемент может повторяться в каждом размещении любое число раз, называются размещениями из n элементов по m элементов с повторениями.

Обозначение:

Число размещений с повторениями обозначается $\overline{A_n^m}$ и может быть вычислено по формуле: $\overline{A_n^m} = n^m$.

Выбор первого элемента можно осуществить n способами (на первое место можно поставить любой из n элементов).

После выбора первого элемента второй элемент можно выбрать n способами (на второе место можно поставить также любой из n элементов, так как элементы в перестановке с повторениями могут повторяться), третий элемент можно выбрать также n способами и т. д., m-й элемент — n способами.

По правилу произведения m элементов из n можно выбрать $n \cdot n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n$ (число сомножителей равно m) способами, т. е. число размещений с повторениями может быть вычислено по формуле: $\overline{A_n^m} = n^m$.

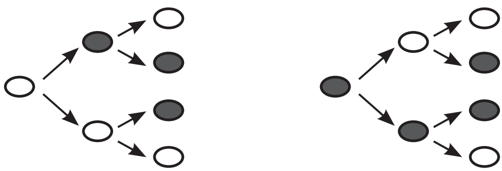


Рис. 3

На рисунке 3 показано количество наборов из двух различных элементов по три — $\overline{A_2^3}$.

Пример. Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 7, 9 (цифры в числе могут повторяться)?

Решение. Так как каждое число будет отличаться от другого только порядком расположения цифр или самими цифрами, при этом цифры могут повторяться, то количество трехзначных чисел, составленных из указанных цифр, будет равно числу размещений с повторениями из 5 элементов по 3. По формуле числа размещений с повторениями из n элементов по m будем иметь: $\overline{A_5^3} = 5^3 = 125$.

Ответ: 125 чисел.

Контрольные вопросы

1. Упростите выражение $\frac{\overline{A_3^5}}{A_6^3}$.

а) 0,05; б) 2,025; в) 4; г) 15.

Ответ: б.

2. Число размещений из n элементов по m с повторениями вычисляется по формуле:

а) $\overline{A_n^m} = n^m$; в) $A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)$;

б) $A_n^m = n!$; г) $\overline{A_n^m} = m^n$.

Ответ: а.

3. Сколько различных трехзначных чисел можно составить из чисел 1, 2, 3, 5, 7, 8 (цифры в числе могут повторяться)?

а) 36; б) 90; в) 27; г) 729.

Ответ: г.

4. Сколькими способами 3 человека могут быть распределены дежурными на 6 дней по одному на каждый день?

а) 12; б) 36; в) 18; г) 729.

Ответ: г.

5. Результат упрощения выражения $\dfrac{2^3\overline{A_5^6}}{\overline{A_{10}^6}}$ равен:

а) 8; б) 0,125; в) 0,04; г) 2.

Ответ: б.

6. Результат упрощения выражения $\dfrac{P_6}{\overline{A_2^3}P_5}$ равен:

а) 0,75; б) 0,25; в) 3; г) $\dfrac{3}{2}$.

Ответ: а.

7. Сколькими способами можно расположить набор из 7 пирожных 5 видов, поместив их в коробку с семью разноцветными ячейками?

а) 7^5; б) 5^7; в) 120; г) 144.

Ответ: б.

8. Сколько можно составить различных пятизначных номеров, состоящих из цифр 0, 3, 5, 7?

а) 5^4; б) 4^5; в) 20; г) 24.

Ответ: б.

Сочетания с повторениями

Определение:

Сочетаниями из n элементов по m с повторениями называются соединения, содержащие m элементов (без учета порядка следования), причем любой элемент может входить в соединение некоторое число раз, не большее m.

Обозначение:

Число сочетаний из n элементов по m с повторениями обозначают $\overline{C_n^m}$.

Формула для вычисления числа сочетаний из n элементов по m с повторениями:

$$\overline{C_n^m} = C_{n+m-1}^m .$$

Вывод формулы:

Закодируем каждое сочетание с повторениями с помощью нулей и единиц. Сначала напишем столько единиц, сколько взято элементов первого типа. Потом, чтобы отделить элементы первого типа от второго, запишем нуль (если не было ни одного элемента первого типа и второго типа, то в записи появятся два следующих друг за другом нуля). Затем напишем столько единиц, сколько взято элементов третьего типа, снова напишем нуль и т. д., пока не будут выписаны единицы, соответствующие элементам n-го типа. Таким образом, число различных сочетаний из n элементов по m с повторениями равно числу перестановок с повторениями, которые можно составить из m единиц и $(n-1)$ нуля.

Т. е. $\overline{C_n^m} = \overline{P}_{m+n-1(m,n-1)} = \dfrac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!} = C_{m+n-1}^m$.

Пример. Сколькими способами можно купить 12 открыток из 10 имеющихся видов?

Решение. Так как открытки могут повторяться, и порядок не существенен, то это будут сочетания из 10 элементов по 12 с повторениями:

$$\overline{C_{10}^{12}} = C_{21}^{12} = \frac{13 \cdot 14 \ldots \cdot 21}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 9} = 293930.$$

Ответ: 29393.

Контрольные вопросы

1. Число сочетаний из n элементов по m с повторениями вычисляется по формуле:

а) $\overline{C_n^m} = C_{m+m}^m$; в) $\overline{C_n^m} = C_{m+m}^{m+1}$;

б) $\overline{C_n^m} = C_{m+n-1}^{m-1}$; г) $\overline{C_n^m} = C_{n+m-1}^m$.

Ответ: г.

2. Сколько существует треугольников, длины сторон которых принимают следующие значения: 4, 5, 6, 7?

а) 12; б) 20; в) 4; г) 6.

Ответ: б.

3. Результат упрощения выражения $C_{100}^{97} + C_{100}^{98}$ равен:

а) 166650; б) 1665; в) 1650; г) 166.

Ответ: а.

4. Сколько можно составить наборов из трех сортов конфет, если в наборе должно быть 12 конфет?

а) 177; б) 169; в) 91; г) 166.

Ответ: в.

6. Решение комбинаторных задач

Уровень 1

1. Сколько различных четырехзначных чисел с неповторяющимися цифрами можно составить?

а) 5040; б) 4536; в) 420; г) 9000.

Ответ: б.

2. Сколько различных четырехзначных чисел с повторяющимися цифрами можно составить?

а) 5040; б) 4536; в) 420; г) 9000.

Ответ: г.

3. В студенческой группе 10 студентов и 8 студенток занимаются лыжным спортом. Сколькими способами можно составить команду для участия в соревнованиях из четырех лыжников и трех лыжниц?

а) 11760; б) 266; в) 210; г) 56.

Ответ: а.

Уровень 2

1. В классе 25 учащихся. Сколько существует различных вариантов присутствия (отсутствия) этих учащихся в классе?

а) 2^{25}; б) $25!$; в) 25^{25}; г) 625.

Ответ: а.

2. Каждого из семи студентов можно отправить на практику в одно из трех подразделений предприятия. Сколькими различными способами это можно сделать?

а) 21; б) 7^3; в) 3^7; г) 63.

Ответ: в.

3. Сколько различных четных делителей имеет число 2310?

а) 16; б) 6; в) 8; г) 36.

Ответ: а.

Уровень 3

1. На окружности отмечено 8 различных точек. Сколько различных хорд с вершинами в этих точках можно провести?

а) 16; б) 28; в) 56; г) 64.

Ответ: б.

2. Каждого из семи студентов можно отправить на практику в одно из четырех подразделений предприятия. Сколькими различными способами это можно сделать?

а) 21; б) 7^3; в) 4^7; г) 63.

Ответ: в.

3. Сколько различных четных делителей имеет число 2520?

а) 24; б) 6; в) 8; г) 36.

Ответ: г.

Уровень 4

1. На окружности отмечено 8 различных точек. Сколько различных треугольников с вершинами в этих точках можно построить?

а) 16; б) 28; в) 56; г) 64.

Ответ: в.

2. Сколько шестизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, если каждое число должно состоять из трех четных и трех нечетных цифр?

а) 28800; б) 9^3; в) 3^9; г) 40.

Ответ: а.

3*. Для премий на олимпиаде выделено 3 экземпляра одной книги, 4 экземпляра другой и 8 экземпляров третьей. Сколькими способами могут быть распределены эти премии между 30 участниками, если каждому вручается не более одной книги?

а) $\frac{30!}{15!3!4!8!}$; б) $\frac{30!}{15!}$; в) $\frac{15!}{3!4!8!}$; г) $15!$.

Ответ: а.

Уровень 5

1. Укротитель хочет вывести на арену цирка 5 различных львов и 4 различных тигров. При этом нельзя, чтобы два тигра шли друг за другом. Сколькими способами он может расположить своих зверей?

а) 120; б) 21600; в) 43200; г) 360.

Ответ: в.

2*. Для пилки дров выделено 14 человек. Сколькими способами их можно разделить на пары?

а) $\frac{14!}{2^7}$; б) $\frac{14!}{7!\,2^7}$; в) $7!$; г) $7!\,2!$.

Ответ: б.

3*. Сколькими способами можно из 100 предметов выбрать нечетное число предметов?

а) 2^{100}; б) 50; в) 2^{50}; г) 2^{99}.

Ответ: г.

Разноуровневые тесты для самостоятельных работ

1. Общие правила комбинаторики

Уровень 1

1. Сколькими способами можно выбрать один цветок из 7 роз и 10 гвоздик различных цветов? Эту задачу можно решить с помощью:

а) правила произведения;
б) правила суммы;
в) обобщенного правила суммы 2;
г) двух правил — произведения и суммы.

2. Сколькими способами можно выбрать одну розу и одну гвоздику из 7 роз и 10 гвоздик различных цветов? Эту задачу можно решить с помощью:

а) правила произведения;
б) правила суммы;
в) обобщенного правила суммы 2;
г) двух правил — произведения и суммы.

3. В классе 24 человека, 16 из них занимаются спортом, 13 — музыкой. Сколькими способами можно выбрать спортсмена на соревнование, если в это же время проходит музыкальный конкурс? Эту задачу можно решить с помощью:

а) правила произведения;
б) правила суммы;
в) обобщенного правила суммы 2;
г) двух правил — произведения и суммы.

Уровень 2

1. Сколькими способами можно выбрать один напиток, если предлагаются 4 молочных и 6 фруктовых напитков?

а) 24; б) 21; в) 10; г) 49.

2. Сколькими способами можно выбрать один молочный и один фруктовый напиток, если предлагается 4 молочных и 6 фруктовых напитков?

а) 10; б) 24; в) 4; г) 49.

3. В классе 15 учащихся занимаются спортом, 11 — музыкой, 4 — спортом и музыкой. Сколько человек в классе, если три человека в классе не занимаются ни спортом, ни музыкой?

а) 27; б) 30; в) 25; г) 26.

Уровень 3

1. Сколько натуральных чисел, среди первых 100, которые делятся или на 4, или на 7?

а) 26; б) 36; в) 42; г) 37.

2. Сколько чисел, среди первых 100, которые делятся и на 4, и на 7?

а) 6; б) 3; в) 5; г) 30.

3. Сколькими способами можно создать набор из трех ручек разных цветов, если есть 4 вида ручек красного цвета, 5 видов — зеленого и 6 — черного?

а) 334; б) 16; в) 15; г) 60.

Уровень 4

1. Из 8 видов ламината и 10 видов линолеума выбирается одно покрытие для пола, а затем из оставшихся видов выбирается еще одно. Сколькими способами это можно сделать?

а) 306; б) 121; в) 126; г) 218.

2. Сколькими способами можно составить код, содержащий одну из букв a, b, c и одну из цифр 2, 4, 5, 7?

а) 12; б) 9; в) 625; г) 40.

3. Сколько «слов» длины 6 можно составить из 33 букв русского алфавита?

а) 33^6; б) $33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30$; в) 32^4; г) 132.

Уровень 5

1. Сколько неудачных попыток можно сделать, открывая замок, код которого состоит из четырех различных цифр?

а) 5040; б) 719; в) 5039; г) 999.

2. Сколькими способами можно составить команду от класса из четырех учеников на соревнование, если в классе 20 человек и каждый из них может участвовать в соревновании?

а) 84; б) 71330; в) 4845; г) 47880.

3. Сколько «слов» длины 3 можно составить из 33 букв русского алфавита так, чтобы любые две соседние буквы не были одинаковыми?

а) 33^4; б) $33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30$; в) $33 \cdot 32 \cdot 32$; г) 132.

2. Вычисление числа перестановок

Уровень 1

1. Верно ли, что значение $6!$ равно:

а) 36; б) 6^5; в) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$; г) 2^6?

2. Число перестановок из шести элементов P_6 равно:

а) 36; б) 6^5; в) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$; г) 2^6?

3. Число различных трехцветных флагов с горизонтальными полосами, которые можно составить, используя синий, белый и красный цвета, равно:

а) числу перестановок из трех элементов;
б) сумме всех цветов;
в) 3;
г) 5.

Уровень 2

1. Результат вычисления $\dfrac{P_{19}}{P_{18}}$ равен:

а) 19; б) 37; в) $\dfrac{1}{272}$; г) $\dfrac{1}{19}$.

2. Результат вычисления $\dfrac{P_{81} - P_{79}}{P_{81}}$ равен:

а) 81; б) 6481; в) $\dfrac{6479}{6480}$; г) $\dfrac{79}{80}$.

3. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр 2, 4, 6, 7 так, чтобы все цифры участвовали в записи?

а) 4; б) 720; в) 24; г) 23.

Уровень 3

1. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр 2, 8, 9, 0 так, чтобы все цифры участвовали в записи?

а) 24; б) 18; в) 4; г) 15.

2. Сколько различных четных четырехзначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 8 так, чтобы все цифры участвовали в записи?

а) 24; б) 18; в) 6; г) 12.

3. Сколько различных нечетных четырехзначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 7, 8 так, чтобы все цифры участвовали в записи?

а) 24; б) 18; в) 6; г) 12.

Уровень 4

1. Сумма цифр во всех пятизначных числах, составленных из цифр 0, 2, 3, 4, 5 (цифры в числе не повторяются), равна:

а) 1440; б) 120; в) 1344; г) 196.

2. Сколькими способами можно расставить на полке 6 книг, если среди них есть двухтомник, книги которого должны стоять рядом?

а) 720; б) 4; в) 15; г) 120.

3. Сколько различных сигналов из 9 символов можно передать так, чтобы три первых символа не менялись?

а) 27; б) 18; в) $6!$; г) 9!.

Уровень 5

1. Сумма всех пятизначных чисел, составленных из цифр 1, 4, 6, 7, 8 (цифры в числе не повторяются), равна:

а) 6933264; б) 399996; в) 1720; г) 2150.

2. Сколько различных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, которые начинаются с цифр 6, 7, 3 (цифры не повторяются)?

а) 24; б) 120; в) 720; г) 360.

3. Сколькими способами можно составить пятизначное число из цифр 1, 2, 3, 4, 5 так, чтобы в нем на первом месте стояла цифра 4, а цифры 3 и 5 стояли рядом?

а) 24; б) 18; в) 12; г) 120.

3. Вычисление числа размещений

Уровень 1

1. Сколькими способами можно выбрать председателя, секретаря и одного члена жюри из пятнадцати учащихся класса? Задачу можно решить по формуле:

а) числа перестановок из трех элементов;
б) числа размещений из пятнадцати элементов по три;
в) числа перестановок из пятнадцати элементов;
г) числа перестановок из восемнадцати элементов.

2. Сколькими способами можно выбрать три книги для призов за первое, второе и третье место в олимпиаде из 12 различных книг? Задачу можно решить по формуле:

а) числа перестановок из трех элементов;
б) числа размещений из двенадцати элементов по три;

в) числа перестановок из двенадцати элементов;
г) числа перестановок из пятнадцати элементов.

3. Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 8 (цифры в числе не могут повторяться)? Задачу можно решить по формуле:

а) числа размещений из пяти элементов по три;
б) числа перестановок из трех элементов;
в) числа перестановок из пяти элементов;
г) числа перестановок из восьми элементов.

Уровень 2

1. Сколько различных четырехцветных флагов из четырех полос можно получить, если можно использовать 5 цветов?

а) 20; б) 120; в) 60; г) 720.

2. Сколько различных четырехцветных флагов из четырех полос можно получить, если можно использовать 5 цветов, при этом два из этих цветов (синий и красный) должны быть рядом?

а) 24; б) 72; в) 60; г) 48.

3. Сколько различных четырехцветных флагов из четырех полос можно получить, если можно использовать 5 цветов, при этом два из этих цветов (синий и красный) не должны быть рядом?

а) 20; б) 72; в) 60; г) 720.

Уровень 3

1*. Сколькими способами можно распределить 6 различных рыб между тремя рыбаками?

а) 18; б) 120; в) 729; г) 100.

2. Сколько различных браслетов можно получить из 5 бусинок, если имеется 10 их видов?

а) 10^7; б) 7^{10}; в) 70.

3. Сколько неудачных попыток можно сделать, чтобы открыть замок, если код содержит 3 цифры из 10, при этом цифры не могут повторяться?

а) 10; б) $10 \cdot 9 \cdot 8 - 1$; в) 10000; г) 9999.

Уровень 4

1. Сколькими способами можно составить расписание из 6 различных уроков на один день, если имеется 15 предметов и два последних урока должны быть уроками физкультуры?

а) 10^6; б) 5^9; в) $\frac{13!}{5!}$; г) $14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11$.

2. На стоянке свободных 9 парковочных мест. Сколькими способами можно поставить 4 автомобиля на эти места?

а) 9^4; б) 4^9; в) $\frac{9!}{5!}$; г) $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$.

3. Сколькими способами можно составить расписание дежурства различных классов по школе на неделю (шесть дней), если каждый день дежурить может один из десяти классов, а один десятый класс не может дежурить в субботу?

а) 10^6; б) $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$; в) 12096; г) $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$.

Уровень 5

1. Сколько различных четырехзначных чисел с неповторяющимися цифрами можно составить, в записи которых есть хотя бы одна четная цифра?

а) 2280; б) 1992; в) $5!$; г) $24 \cdot 184$.

2. Сейф открывается при помощи кода, состоящего из 5 различных цифр из 10 и следующих за ними трех неповторяющихся букв из 33. Сколько неудачных попыток можно сделать, чтобы открыть сейф?

а) $33 \cdot 10^5$; в) $\left(\frac{33!}{30}\right) \cdot \left(\frac{10!}{5!}\right) - 1$;

б) $33^3 \cdot 10^5$; г) $33^3 \cdot 10^5 - 1$.

3. Сейф открывается при помощи кода, состоящего из 5 различных цифр из 10 и следующих за ними трех различных букв из 33. Сколько неудачных попыток можно сделать, чтобы открыть сейф, если первая цифра известна?

а) $33 \cdot 10^4$; в) $\left(\frac{33!}{30!}\right) \cdot \left(\frac{9!}{5!}\right) - 1$;

б) $33^3 \cdot 10^4 - 1$; г) $3^{32} \cdot 4^{10} - 1$.

4. Вычисление числа сочетаний

Уровень 1

1. В классе 20 учеников. Сколькими способами можно выбрать из них трех дежурных? Задачу можно решить по формуле:

а) числа перестановок из трех элементов;
б) числа размещений из 20 элементов по три;
в) числа перестановок из 20 элементов;
г) числа сочетаний из 20 элементов по три.

2. Вычислить значение $C_{50}^{0}+C_{50}^{1}+\ldots+C_{50}^{50}$ можно с помощью формулы:

а) $C_n^m=C_n^{n-m}$;
б) $C_n^m+C_n^{m+1}=C_{n+1}^{m+1}$;
в) $C_n^0+C_n^1+\ldots+C_n^n=2^n$;
г) $C_n^m=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

3. Значение выражения $C_{50}^{0}+C_{50}^{1}+\ldots+C_{50}^{50}$ равно:

а) 65; б) 64; в) 32; г) 30.

Уровень 2

1. В классе 25 учащихся. Сколькими способами можно выбрать из них трех делегатов на конференцию?

а) $25\cdot24\cdot23$; б) 3^{25}; в) 75; г) 2300.

2. Вычислите: $C_{50}^{0}+C_{50}^{1}+\ldots+C_{50}^{50}$. Выберите правильный ответ:

а) 24; б) 64; в) 32; г) 2^{50}.

3. Результат упрощения выражения $\dfrac{n!}{(n-1)!}$ равен:

а) $n(n-1)$; б) $2n$; в) n; г) $n-1$.

Уровень 3

1. Сколько плоскостей можно провести через 12 точек пространства, из которых никакие четыре не лежат в одной плоскости, если каждая плоскость проходит через три данные точки?

а) 60; б) 3^{10}; в) 220; г) 10^3.

2. Решения неравенства $C_n^5 \le C_n^3$ — это числа:

а) 1, 2, 3; б) 6, 5, 4; в) 5, 6, 7, 8; г) 6, 7.

3. Корень уравнения $\frac{3}{2(2n-1)}C_{2n}^{2n-3} = 20$ равен:

а) 5; б) 4; в) 3; г) 6.

Уровень 4

1. Сколькими способами можно выбрать 6 делегатов на конференцию: из 60 старшеклассников четырех и из пяти практикантов двух?

а) 385; б) $25 \cdot 57 \cdot 58 \cdot 59$; в) $57 \cdot 58 \cdot 59$; г) $2 \cdot 60^4$.

2. Решение неравенства $C_{15}^{k-2} > C_{15}^{k}$ — это числа:

а) 10, 11, 12, 13, 14, 15; в) 15;
б) 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15; г) 6, 7, 8, 9, 10.

3. Имеется 12 различных конфет. Сколькими способами можно составить из них набор, если в наборе должно быть четное число конфет?

а) 2048; б) 2047; в) 2046; г) 96.

Уровень 5

1. Сколько различных аккордов можно взять из десяти выбранных клавиш рояля, если каждый аккорд может содержать от трех до десяти звуков?

а) 968; б) 1024; в) 512; г) 960.

2. Решение неравенства $C_n^5 > C_n^3$ — это числа:

а) 1, 2, 3, 4, 5; в) 15;
б) 9, 10, 11, 12...; г) 5, 6, 7.

3. В мозаике 10 желтых фишек и восемь зеленых различной формы. Сколькими способами можно выбрать из них по три фишки разного цвета и распределить на шесть пронумерованных мест?

а) $C_{10}^3 C_8^3$; б) $C_{10}^3 C_8^3 6!$; в) $C_{10}^6 C_8^6$; г) 480.

Глава 2. БИНОМ НЬЮТОНА

Материалы для изучения темы «Бином Ньютона» содержат:

- краткую теоретическую справку с выводами основных формул;
- примеры применения формул и основных свойств с решениями;
- контрольные вопросы, содержащие проверочные задания на знание теории и ее применение к решению задач с ответами;
- разноуровневые тесты (пять уровней) с ответами для проверки и коррекции знаний;
- разноуровневые тесты (пять уровней) для самостоятельной работы.

Формула для разложения *n*-й степени бинома (двучлена) в сумму

При любом натуральном *n* справедлива формула:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \ldots + C_n^m a^{n-m} b^m + \ldots + C_n^n a^0 b^n,$$

которая называется формулой Ньютона, в честь английского физика и математика Исаака Ньютона (1642—1727).

Правую часть этой формулы называют разложением степени бинома.

Доказательство:

(Доказательство проведем методом математической индукции.)

1. Проверим справедливость формулы при $n = 1$.

$(a+b)^1 = C_1^0 a^1 b^0 + 1a^0 b^1 = a + b$, утверждение верно.

2. Покажем, что из $A(k)$ следует $A(k+1)$, где

$$A(k):(a+b)^k = C_k^0 a^k b^0 + C_k^1 a^{k-1} b^1 + \ldots + C_k^m a^{k-m} b^m + \ldots + C_k^k a^0 b^k.$$

Имеем:

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)^k (a+b) =$$

$$= (C_k^0 a^k b^0 + C_k^1 a^{k-1} b^1 + \ldots + C_k^m a^{k-m} b^m + \ldots + C_k^k a^0 b^k)(a+b) =$$

$$= C_k^0 a^{k+1} b^0 + (C_k^1 + C_k^0) a^k b^1 + (C_k^m + C_k^{m+1}) a^{k-m-1} b^{m+1} + \ldots + C_k^k a^0 b^{k+1} =$$

$$= C_{k+1}^0 a^{k+1} b^0 + C_{k+1}^1 a^k b^1 + \ldots + C_{k+1}^{m+1} a^{k-m-1} b^{(m+1)} + \ldots + C_{k+1}^{k+1} a^0 b^{k+1}.$$

На основании принципа математической индукции утверждение верно для любого натурального n.

Замечание:

Заметим, что доказательство можно провести, используя только определение числа сочетаний из n элементов по m. Действительно, при умножении n скобок бинома появятся подобные слагаемые, содержащие произведение числового коэффициента и степеней переменных a и b. Показатели степеней a и b будут изменяться от n до 0 и от n до 0 соответственно, при этом сумма показателей степеней этих множителей в каждом слагаемом будет равна n. Определим числовой коэффициент слагаемого, содержащего произведение $a^{(n-m)} b^m$. Он равен числу слагаемых, содержащих b^m. Таких слагаемых будет столько, сколькими способами можно выбрать из n пронумерованных скобок (множителей бинома) m скобок, содержащих b, и $n-m$ скобок, содержащих a. Число таких способов равно C_n^m. Таким образом, m-й член разложения бинома Ньютона имеет вид:

$$T_m = C_n{}^m a^{n-m} b^m.$$

Треугольник Паскаля

Коэффициенты в разложении бинома Ньютона можно вычислить, пользуясь треугольником Паскаля.

0										1									
1									1		1								
2								1		2		1							
3							1		**3**		**3**		1						
4						1		4		**6**		4		1					
5					1		5		10		10		5		1				
6				1		6		**15**		**20**		15		6		1			
7			1		7		21		**35**		35		21		7		1		
8		1		8		28		56		70		56		28		8		1	
9	1		9		36		84		126		126		84		36		9		1

Чтобы найти число в какой-либо строке таблицы, достаточно найти сумму двух чисел, стоящих в предыдущей строке: над этим числом первого справа и слева. Например, для определения коэффициента в четвертой строчке: $6 = 3 + 3$; в седьмой строчке: $35 = 15 + 20$.

Пример. Найдите разложение степени бинома $(a+b)^6$.

Решение.

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6,$$

коэффициенты в разложении взяты из 6-й строки треугольника Паскаля. Степень a уменьшается от 6 до 0, а степень b увеличивается от 0 до 6.

Основные следствия из формулы бинома Ньютона

1. В разложении бинома Ньютона содержится $(n+1)$ слагаемых.

Пример 1. Число слагаемых в разложении бинома Ньютона $(a+b)^{11}$ равно $n + 1 = 11 + 1 = 12$.

2. В формуле Ньютона показатель при *a* убывает от *n* до 0, а показатель при *b* возрастает от 0 до *n*.

3. Биномиальные коэффициенты, равноудаленные от концов разложения, равны.

Пример 2. Седьмой биномиальный коэффициент в разложении бинома Ньютона $(a+b)^k$ равен m. Найдите номер члена разложения с таким же коэффициентом.

Решение. Седьмой биномиальный коэффициент в разложении бинома Ньютона $(a+b)^k$ равен m, тогда есть еще один член с таким же коэффициентом в этом разложении.

Этот член удален от конца разложения на столько же, на сколько член с коэффициентом m удален от начала разложения, его номер $k+1-7=k-6$. Значит, искомый член разложения имеет номер $k-6$ (считая от нулевого члена).

4. Биномиальные коэффициенты сначала возрастают, а затем убывают. Если показатель степени бинома четный, то биномиальный коэффициент среднего слагаемого наибольший, если показатель степени бинома нечетный, то биномиальные коэффициенты двух средних слагаемых равны между собой и являются наибольшими.

Пример 3. Найдите номер члена с наибольшим биномиальным коэффициентом в разложении бинома Ньютона $(a+b)^{2015}$.

Решение. Так как число членов разложения четное, то наибольший биномиальный коэффициент в разложении бинома Ньютона $(a+b)^{2015}$ будет у двух средних членов разложения. Определим их номера: так как всего членов в разложении $2015+1=2016$, то средними членами будут члены с номерами 1008 и 1009 (1007 членов до 1008-го и 1007 членов после 1009-го).

5. Сумма показателей степеней a и b в разложении бинома Ньютона равна степени бинома.

Пример 4. Найдите сумму всех коэффициентов членов многочлена в разложении $(14x^{20}-13x)^{44}$.

Решение. Каждый член многочлена содержит степень переменной и коэффициент, который равен значению этого члена при $x=1$. Значит, искомая сумма коэффициентов будет равна значению многочлена при $x=1$, т. е. $\left(14\cdot 1^{20}-13\cdot 1\right)^{44}=1$.

6. Общий член разложения, обозначим его T_m, имеет вид: $T_m=C_n^m a_n^{n-m} b^m$.

Пример 5. Найдите девятый член разложения $(a^2+1)^{12}$ бинома Ньютона.

Решение.

$$T_9 = C_{12}{}^9 a^{12-9} b^9 = C_{12}{}^9 a^{(12-m)2} = 220a^{24-2m} = 220a^6.$$

Замечание:

Чтобы записать в общем виде слагаемые в разложении бинома Ньютона, удобно $(m+1)$-е слагаемое считать m-м членом. Например, пятое слагаемое в разложении

$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$ — это есть одночлен $15a^2b^4$, а учитывая, что биномиальные коэффициенты начинаются с числа $C_6^0 = 1$, то одночлен $15a^2b^4$ является четвертым членом этого разложения.

7. Сумма биномиальных коэффициентов разложения бинома $C_k^0 + C_k^1 + \ldots + C_k^k = 2^k$.

Доказательство:

Подставим $a = b = 1$ в формулу

$$(a+b)^n = C_n{}^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \ldots + C_n^m a^{n-m} b^m + \ldots + C_n^n a^0 b^n,$$

получим: $C_k^0 + C_k^1 + \ldots + C_k^k = 2^k$.

8. Сумма биномиальных коэффициентов, членов разложения бинома, стоящих на четных местах, равна сумме коэффициентов членов разложения бинома, стоящих на нечетных местах.

Доказательство:

Подставим $a = 1$, $b = -1$ в формулу

$$(a+b)^n = C_n{}^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \ldots + C_n^m a^{n-m} b^m + \ldots + C_n^n a^0 b^n.$$

Будем иметь: $0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots (-1)^n C_n^n$, откуда получается: $C_n^0 + C_n^2 \ldots\ldots = C_n^1 + C_n^3 \ldots\ldots$.

Контрольные вопросы

1. Коэффициент третьего члена в разложении бинома Ньютона $(a+b)^5$ равен:

а) 10; б) 5; в) 6; г) 15.

Ответ: а.

2. Сумма $a^6 + 6a^5 2 + 15\ a^4 2^2 + 20\ a^3 2^3 + 15\ a^2 2^4 + 6a2^5 + 2^6$ равна:

а) $(a+1)^6$; б) $(a+2)^5$; в) $(a+1)^5$; г) $(a+2)^6$.

Ответ: г.

3. Сумма $3^6 + 6 \cdot 3^5 2 + 15 \cdot 3^4 2^2 + 20 \cdot 3^3 2^3 + 15 \cdot 3^2 2^4 + 6 \cdot 32^5 + 2^6$ равна:

а) 5^6; б) 6^5; в) 625; г) 2^6.

Ответ: а.

4. Число слагаемых в разложении бинома Ньютона $(a + b)^{10}$ равно:

а) 10; б) 12; в) 11; г) 9.

Ответ: в.

5. Число слагаемых в разложении бинома Ньютона $(a + b)^k$ равно:

а) k; б) $k + 1$; в) $2k$; г) $k - 1$.

Ответ: б.

6. Пятый биномиальный коэффициент в разложении бинома Ньютона $(a+b)^k$ равен m, тогда номер члена (считаем с нулевого члена) с таким же коэффициентом:

а) $k - 5$; б) $k - 4$; в) 10; г) $k - 3$.

Ответ: б.

7. Член с наибольшим биномиальным коэффициентом в разложении бинома Ньютона $(a+b)^{100}$ имеет номер:

а) 51; б) 50; в) 49; г) 52.

Ответ: а.

8. Члены с наибольшими биномиальными коэффициентами в разложении бинома Ньютона $(a+b)^{203}$ имеют номера:

а) 100; б) 101, 100; в) 99, 100; г) 101, 102.

Ответ: г.

9. Сумма показателей степеней переменных 1000-го члена разложения $(a+b)^{2015}$ равна:

а) 1000; б) 2016; в) 1003; г) 2015.

Ответ: г.

10. Сумма показателей степеней переменных k-го члена разложения $(a+b)^m$ $(k<m)$ равна:

а) $k+m$; б) k; в) m; г) $m+1$.

Ответ: в.

11. Сумма показателей степеней переменных $(k+1)$-го члена разложения $(a+b)^m$ $(k+1<m)$ равна:

а) $k+m+1$; б) $k+1$; в) $m+1$; г) m.

Ответ: г.

12. Пятый член разложения бинома Ньютона $(a+b)^7$ имеет вид:

а) $21a^5b^2$; б) $35a^5b^2$; в) $21a^4b^3$; г) $21a^2b^5$.

Ответ: г.

13. Десятый член разложения бинома Ньютона $(a+b)^{12}$ имеет вид:

а) $66a^{10}b^2$; б) $12a^{10}b^2$; в) $66a^2b^{10}$; г) $12\ a^2b^{10}$.

Ответ: в.

14. Десятый член разложения бинома Ньютона $(a^3+1)^{12}$ имеет вид:

а) $66a^{30}$; б) $12a^{30}$; в) $66a^6$; г) $12a^6$.

Ответ: в.

15. Четвертый член разложения бинома Ньютона $(a^2+2)^6$ имеет вид:

а) $240a^2$; б) $240a^4$; в) $15a^4$; г) $240a^8$.

Ответ: б.

Разноуровневые тесты

Бином Ньютона

Уровень 1

1. Найдите в треугольнике Паскаля коэффициент пятого члена в разложении бинома Ньютона $(a+b)^8$:

а) 70; б) 56; в) 28; г) 84.

Ответ: б.

2. С помощью формулы $T_5 = C_8^5 a_n^{n-m} b^m$ запишите пятый член в разложении бинома Ньютона $(a+b)^8$.

а) $15a^4b^2$; в) $70a^4b^4$;
б) $70a^4b^2$; г) $56a^3b^5$.

Ответ: г.

3. Многочлен

$$a^8 + 8a^7 \cdot 2 + 28a^6 \cdot 2^2 + 56a^5 \cdot 2^3 + 70a^4 \cdot 2^4 + 56a^3 \cdot 2^5 + \\ +28a^2 2^6 + 8a \cdot 2^7 + 2^8$$

тождественно равен:

а) $(a+2)^7$; в) $(a-2)^8$;
б) $(a+2)^9$; г) $(a+2)^8$.

Ответ: г.

Уровень 2

1. Коэффициент пятого члена в разложении бинома Ньютона $(a-1)^{10}$ равен:

а) 120; б) 252; в) 210; г) 84.

Ответ: б.

2. Пятый член в разложении бинома Ньютона $(a-b)^{10}$ равен:

а) $120a^5b^5$; в) $120a^8b^2$;
б) $252a^5b^5$; г) $210a^6b^4$.

Ответ: б.

3. Многочлен $a^8 - 8a^7 + 28a^6 - 56a^5 + 70a^4 - 56a^3 + 28a^2 - 8a + 1$ тождественно равен:

а) $(a+1)^7$; в) $(a-1)^8$;
б) $(a+1)^9$; г) $(a+1)^8$.

Ответ: в.

Уровень 3

1. Номер члена разложения $\left(\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}\right)^{20}$, содержащего x^7, равен:

а) 7; б) 14; в) 12; г) 10.

Ответ: в.

2. Число членов в разложении бинома $(a+x)^{2k-1}$:

а) $2k$; б) $2k+1$; в) $2k-1$; г) $k-1$.

Ответ: а.

3. Номер члена разложения $\left(\frac{1}{x}+\sqrt{x}\right)^6$, не содержащего x, равен:

а) 5; б) 3; в) 6; г) 4.

Ответ: г.

Уровень 4

1. Номер члена разложения $\left(x-\sqrt[4]{x}\right)^{40}$, содержащего x^{13}, равен:

а) 36; б) 13; в) 33; г) 26.

Ответ: а.

2. Число членов в разложении бинома $(4a+x)^{4k-5}$:

а) $4k+1$; б) $4k-2$; в) $4k-4$; г) $k-4$.

Ответ: в.

3. Сумма всех коэффициентов в разложении бинома $\left(12x^{20}-13x^{12}\right)^{144}$ равна:

а) 144; б) $144\cdot 13\cdot 14$; в) 1; г) –1.

Ответ: в.

Уровень 5

1. В разложении $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^p$ отношение коэффициента четвертого члена к коэффициенту второго члена разложения равно 7 : 2. Тогда член разложения, содержащий x в первой степени, равен:

а) $35x$; б) $84x$; в) $32x$; г) $6x$.

Ответ: б.

2. Сумма всех коэффициентов членов многочлена в разложении $(14x^{20}-3x^{12}-11x^{10})^{144}$ равна:

а) 144; б) 1; в) 0; г) –1.

Ответ: в.

3. Коэффициент при x^{12} в разложении $\left(x^7 + x^5 + 1\right)^{20}$ равен:

а) 190; б) 350; в) 360; г) 380.

Ответ: г.

Тесты для самостоятельной работы

Уровень 1

1. Коэффициент четвертого члена в разложении бинома Ньютона $(a+b)^7$ равен:

а) 35; б) 56; в) 28; г) 84.

2. Четвертый член в разложении бинома Ньютона $(a+b)^7$ равен:

а) $15a^4b^2$; б) $35a^3b^4$; в) $70a^4b^4$; г) $56a^4b^2$.

3. Многочлен $a^7 + 7a^6 \cdot 3 + 21a^5 \cdot 3^2 + 35a^4 3^3 + 35a^3 3^4 + {}$ $+21a^2 3^5 + 7a \cdot 3^6 + 3^7$ тождественно равен:

а) $(a+3)^7$; б) $(a-3)^9$; в) $(a-3)^8$; г) $(a+3)^8$.

Уровень 2

1. Коэффициент пятого члена в разложении бинома Ньютона $(a-1)^9$ равен:

а) 120; б) 252; в) 126; г) 84.

2. Пятый член в разложении бинома Ньютона $(a-b)^9$ равен:

а) $120a^5b^5$; б) $252a^4b^6$; в) $120a^8b^2$; г) $126a^4b^5$.

3. Многочлен $a^8 + 8a^7 + 28a^6 + 56a^5 + 70a^4 + 56a^3 + {}$ $+28a^2 + 8a + 1$ тождественно равен:

а) $(a+1)^7$; б) $(a+1)^9$; в) $(a-1)^8$; г) $(a+1)^8$.

Уровень 3

1. Номер члена разложения $\left(\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}\right)^{20}$, содержащего x^9, равен:

а) 7; б) 14; в) 4; г) 10.

2. Число членов в разложении бинома $(a+b)^{2k-2}$:

а) $2k$; б) $2k+1$; в) $2k-1$; г) $k-1$.

3. Номер члена разложения $\left(\dfrac{1}{x}+\sqrt{x}\right)^6$, содержащего x^3, равен:

а) 7; б) 4; в) 6; г) 6 .

Уровень 4

1. Номер члена разложения $\left(x-\sqrt[4]{x}\right)^{40}$, содержащего x^{19}, равен:

а) 36; б) 13; в) 33; г) 28.

2. Число членов в разложении бинома $(5a+\ 3x)^{4k-4}$:

а) $4k+1$; б) $4k-2$; в) $4k-3$; г) $k-4$.

3. Сумма всех коэффициентов в разложении бинома $\left(18x^{20}-19x^{12}\right)^{149}$ равна:

а) 144; б) $144\cdot13\cdot14$; в) 1; г) –1.

Уровень 5

1. В разложении $\left(x^3+\sqrt[3]{x}\right)^k$ отношение коэффициента шестого члена к коэффициенту четвертого члена разложения равно 3 : 5. Тогда член разложения, содержащий x в пятой степени, равен:

а) $35x^5$; б) $7x^5$; в) $32x^5$; г) $6x^5$.

2. Сумма всех коэффициентов членов многочлена в разложении $(16x^{25}-13x^{16}2x^{10})^{2015}$ равна:

а) 2015; б) 1; в) 0; г) –1.

3. Коэффициент при x^{15} в разложении $(x^7+x^8+1)^{30}$ равен:

а) 435; б) 350; в) 360; г) 30.

Дополнительные задачи

1. Оля оставила в такси сумку и запомнила только, что номер машины содержал буквы *В*, *Е*, *С* и цифры 2, 3, 6. Порядок их следования она не запомнила. Сколько таких номеров нужно перебрать, чтобы найти нужный? (35)

2. В информатике применяется «двоичное кодирование», в котором используются только две цифры: 0 и 1. Постройте все двоичные коды длины 5. (32)

3. Регулярное сообщение между Минском и аэропортом поддерживают скоростной автобус-экспресс, автобус-«маршрутка» и электричка. Кроме того, из Минска в аэропорт можно заказать такси. Михаил должен съездить в аэропорт и вернуться обратно. При этом возвращаться на электричке он не хочет. Сколько вариантов такой поездки? (12)

4. Шестеро друзей пришли в кинотеатр. Все их места расположены вместе (подряд) в одном ряду. Сколькими способами они могут сесть так, чтобы Оля и Коля сидели рядом? (240)

5. Сколько пятизначных чисел содержат в своей записи хотя бы один ноль? (30951)

6. На вершину горы ведут 5 дорог. Сколькими способами турист может подняться на гору и спуститься с нее? (25)

7. На вершину горы ведут 5 дорог. Сколькими способами турист может подняться на гору и спуститься с нее, если прямая и обратная дороги не совпадают? (20)

8. Коля, Оля, Саша и Маша должны с помощью жребия распределить между собой два выигранных в конкурсе приза: мобильный телефон и MP3-плеер. Сколькими способами это можно сделать? (12)

9. Во вторник в 10 «А» классе должно быть 2 урока математики, 1 урок физики и 3 урока физкультуры. Сколькими способами можно составить расписание этих уроков? (60)

10. Первого сентября в первый класс пришли 12 девочек и 12 мальчиков. Сколькими способами их можно посадить на 24 места, если за каждой партой должны сидеть мальчик и девочка и чтобы мальчики и девочки сидели друг за другом? $(12!\cdot 12!\cdot 2)$

11. Из двухсот заявок, поданных для участия в международном кинофестивале, организаторам нужно отобрать 30 фильмов для конкурсного показа. Сколькими способами это можно сделать? $\left(C_{200}^{30}\right)$

12. Группу из 30 туристов нужно распределить по трем маршрутам так, чтобы по первому маршруту шли 12 человек, по второму — 10, по третьему — 8. Сколькими способами это можно сделать? $\left(\dfrac{30!}{12!10!8!}\right)$

13. На некоторой прямой отмечено 15 точек, а на параллельной ей прямой — 18. Сколько различных треугольников с вершинами в этих точках можно построить? (4185)

14. Из трех математиков и десяти экономистов нужно составить комиссию из семи человек так, чтобы хотя бы один математик входил в эту комиссию. Сколькими способам это можно сделать? (1596)

Историческая справка

Разрозненные комбинаторные задачи человечество решало с незапамятных времен. К концу XVI века накопились знания, относящиеся:

1) к свойствам фигурных чисел;
2) построению магических (и иных числовых) квадратов;
3) свойствам биномиальных коэффициентов.

Термин «комбинаторика» был введен в математический обиход знаменитым Лейбницем. **Готфрид Вильгельм Лейбниц** (1.07.1646—14.11.1716) — всемирно известный немецкий ученый. Он занимался философией, математикой, физикой, организовал Берлинскую академию наук и стал ее первым президентом. В математике он вместе с И. Ньютоном разделяет честь создателя дифференциального и интегрального исчислений. В 1666 году Лейбниц опубликовал «Рассуждения о комбинаторном искусстве». В своем сочинении Лейбниц вводит специальные символы, термины для подмножеств и операций над ними, находит все k-сочетания из n элементов, выводит свойства сочетаний:

$$C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}; \; C_n^2 = \frac{n(n+1)}{2}; \; \sum_{i=0}^{n} C_n^i = 2^n .$$

Лейбниц строит таблицы сочетаний до $n = k = 12$, после чего рассуждает о приложениях комбинаторики к логике, арифметике, проблемам стихосложения и др.

В течение всей своей жизни Лейбниц многократно возвращался к идеям комбинаторного искусства. Комбинаторику он понимал весьма широко, а именно как составляющую любого исследования, любого творческого акта, предполагающего сначала анализ (расчленение целого на части), а затем синтез (соединение частей в целое). Мечтой Лейбница, оставшейся неосуществленной, оставалось построение общей комбинаторной теории. Комбинаторике Лейбниц предрекал блестящее будущее, широкое применение.

В XVIII веке к решению комбинаторных задач обращались выдающиеся математики. Так, Леонард Эйлер рассматривал задачи о разбиении чисел, паросочетаниях, циклических расстановках, построении магических и латинских квадратов.

В 1713 году было опубликовано сочинение Я. Бернулли «Искусство предположений», в котором с достаточной полнотой были изложены известные к тому времени комбинаторные факты. «Искусство предположений» появилось после смерти автора и не было завершено. Сочинение состояло из 4 частей, комбинаторике была посвящена вторая часть, в которой содержатся формулы:

- для числа перестановок из n элементов;
- для числа сочетаний (называемого Я. Бернулли классовым числом) без повторений и с повторениями;
- для числа размещений с повторениями и без повторений.

Для вывода формул автор использовал наиболее простые и наглядные методы, сопровождая их многочисленными таблицами и примерами. Сочинение Я. Бернулли превзошло работы его предшественников и современников систематичностью, простотой методов, строгостью изложения, и в течение XVIII века пользовалось известностью не только как серьезного научного трактата, но и как учебно-справочного издания. В работах Я. Бернулли и Лейбница тщательно изучены свойства сочетаний, размещений, перестановок. Перечисленные комбинаторные объекты относятся к основным *комбинаторным конфигурациям*. Отметим, что в математике в XIX веке появился сначала термин «геометрическая конфигурация» в лекциях по проективной геометрии профессора университета в Страсбурге К. Т. Рейе (1882).

Блез Паскаль (19 июня 1623, Клермон-Ферран, — 19 августа 1662, Париж) — французский математик, физик, литератор и философ. Ранние работы Блеза относились к естественным и прикладным наукам. Отец Блеза был сборщиком налогов, и, наблюдая за его бесконечными утомительными расчетами, Паскаль задумал создать вычислительное устройство, которое могло бы помочь этой работе. В возрасте 19 лет в 1642 году Паскаль начал создание своей суммирующей ма-

шины «паскалины». Машина Паскаля выглядела в виде ящика, наполненного многочисленными связанными одна с другой шестеренками. Складываемые числа вводились соответствующим поворотом колес. Примерно за 10 лет Паскаль построил около 50 вариантов своей машины. Несмотря на вызываемый ею всеобщий восторг, машина не принесла богатства своему создателю. Однако изобретенный Паскалем принцип связанных колес почти на три столетия стал основой создания большинства вычислительных устройств. Паскаль был первоклассным математиком. Он помог создать два крупных новых направления математических исследований. В возрасте 16 лет написал замечательный трактат о предмете проективной геометрии и в 1654 году переписывался с Пьером де Ферма по теории вероятностей, что впоследствии оказало принципиальное влияние на развитие современной экономики и социологии. Имя Блеза Паскаля носит один из языков программирования Pascal, а также способ расположения биномиальных коэффициентов в таблицу — треугольник Паскаля.

В 1896 году американский математик **Элиаким Гастингс Мур** (1862—1932) ввел термин «тактическая конфигурация» в статье «Tactical memoranda», понимая под этим термином систему n множеств, содержащих, соответственно, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ элементов. Тактическую конфигурацию Мур задает квадратной матрицей порядка n, в которой элемент a_{kk}, стоящий на главной диагонали, равен числу a_k (числу элементов в k-м множестве); элемент $a_{ij}\ (i \neq j)$ равен числу элементов i-го множества, инцидентных j-му множеству. К тактическим конфигурациям Мур относит сочетания, размещения, системы решений задачи Киркмана о 15 школьницах, подгруппы некоторых групп. Он демонстрирует широкий спектр задач из геометрии, теории групп, которые приводят к тактическим разложениям или используют их. Мур обогатил список известных комбинаторных конфигураций построением новых, обобщающих системы троек Штейнера и Киркмана.

Термин «тактика» ввел в математику английский математик **Джеймс Джозеф Сильвестр** (1814—1897) в 1861 году. Сильвестр определял тактику как раздел математики, изучающий расположение элементов друг относительно друга. В сфере этого раздела находится, по мнению Сильвестра, теория групп, комбинаторный анализ и теория чисел. Мысли Сильвестра о тактике разделял его друг Артур Кэли.

Комбинаторика, пройдя многовековой путь развития, обретя собственные методы исследования, с одной стороны, широко используется при решении задач алгебры, геометрии, анализа, с другой стороны, сама использует геометрические, аналитические и алгебраические методы исследования. В конце XVIII века ученые, принадлежащие комбинаторной школе Гинденбурга, попытались построить общую комбинаторную теорию, используя бесконечные ряды. Исследователи этой школы изучили большое количество преобразований рядов: умножение, деление, возведение в степень, извлечение корней, обращение рядов, разложение трансцендентных функций. Использование производящих функций в комбинаторике можно отнести к (уже) классическим традициям.

В XX веке комбинаторика подверглась мощному процессу алгебраизации благодаря работам Дж.-К. Рота (1964), а затем Р. Стенли. Изучение ими частично упорядоченных множеств, свойств функции Мебиуса, абстрактных свойств линейной зависимости, выявление их роли при решении комбинаторных задач способствовали обогащению комбинаторных методов исследования и дальнейшей интеграции комбинаторики в современную математику.

Ньютон Исаак (1643—1727) — английский математик, физик, алхимик и историк. Родился в семье фермера. В возрасте 12 лет поступил в Грантемскую школу, в 1661 году — в колледж Св. Троицы (Тринити-колледж) Кембриджского университета в качестве субсайзера (так назывались бедные студенты, выполнявшие для заработка обязанности слуг в колледже).

Окончив университет, Ньютон в 1665 году получил ученую степень бакалавра. В 1665—1667 гг. у него сложились в основном те идеи, которые привели его к созданию дифференциального и интегрального исчислений, изобретению зеркального телескопа, открытию закона всемирного тяготения.

В Кембридже он также провел опыты над разложением света. В 1668 году Ньютону была присвоена степень магистра. В 1671 году он построил второй зеркальный телескоп — больших размеров и лучшего качества. Ньютону принадлежат обоснованные тончайшими экспериментами представления о монохроматических световых лучах и периодичности их свойств, лежащие в основе физической оптики.

В 1687 году Ньютон опубликовал свой грандиозный труд — «Математические начала натуральной философии» (кратко — «Начала»), заложивший основы не только рациональной механики, но и всего математического естествознания. «Начала» содержали законы динамики, закон всемирного тяготения с эффективными приложениями к движению небесных тел, истоки учения о движении и сопротивлении жидкостей и газов, включая акустику.

В 1705 году за научные труды королева Анна возвела Ньютона в рыцарское звание. В последние годы жизни он много времени посвящал теологии и античной и библейской истории. Похоронен Ньютон в английском национальном пантеоне — Вестминстерском аббатстве.

Литература

1. *Алфутова, Н. Б.* Алгебра и теория чисел: Сборник задач для математических школ / Н. Б. Алфутова, А. В. Устинов. М. : МЦМНО, 2002.

2. *Виленкин, Н. Я.* Индукция. Комбинаторика : пособие для учителей / Н. Я. Виленкин. М. : Просвещение, 1976. 47 с.

3. *Виленкин, Н. Я.* Комбинаторика : пособие для учителей / Н. Я. Виленкин. М. : Просвещение, 1969. 247 с.

4. *Халмайзер, А. Я.* Комбинаторика и бином Ньютона : пособие для учащихся / А. Я. Халмайзер. М. : Просвещение, 1980. 32 с.

Содержание

Учебное издание

Берник Василий Иванович
Пирютко Ольга Николаевна

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ И БИНОМ НЬЮТОНА

Пособие для учителей учреждений общего среднего образования

Ответственный за выпуск *А. В. Зуева*

Ведущий редактор *С. Е. Шумак*
Редактор *И. А. Павловская*
Художник *Е. Н. Рогова*
Художник обложки *Е. Н. Рогова*
Компьютерная верстка *И. А. Павловской*

Подписано в печать с оригинал-макета 22.03.2016. Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная. Печать цифровая. Усл. печ. л. 4,19. Уч.-изд. л. 2,08. Дополнительный тираж 1602 экз. Заказ 193/5746325-2.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Общество с ограниченной ответственностью «Издательский Дом «Белый Ветер». Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/35 от 16.01.2015. Ул. Советская, 198/4, 247760, г. Мозырь, Гомельская обл., Беларусь. Тел./факс (0236) 32-51-03, 32-51-22. Филиал: ул. Володько, 30, оф. 417, 220007, г. Минск, Беларусь. Тел. (017) 224-66-89, 298-50-26, 298-50-27. book.belveter.by. E-mail: book@belveter.by

2

Для заметок