9 класс

2-й вариант РЕШЕНИЯ

1-й тур = 1-й день

9.1. $\overline{ab}$ двузначное число, составленное из цифр a, b. Найдите всевозможные числа $\overline{ab}$ такие, что $\overline{ab}\cdot\overline{ba}=a^3+(a+b)^3$.

Ответ: 91. ($\left[91\cdot 19=9^3+(9+1)^3\right]$)

Решение:

$(10a+b)\cdot(10b+a)=a^3=\left(a+(a+b)\right)\cdot\left(a^2-a(a+b)+(a+b)^2\right)=$

$=(2a+b)\cdot\left(a^2+ab+b^2\right)$, то $10a^2+101ab+10b^2$ делится на a^2+ab+b^2, следовательно, $91ab$ делится на a^2+ab+b^2, поскольку $\left(10a^2+101ab+10b^2\right)-10\cdot\left(a^2+ab+b^2\right)=91ab.$

Пусть $d=HOD(a;b),\ a=dm,\ b=dn,$ тогда $HOD(m;n)=1.$

Т.к. $91(dm)\cdot(dn)$ делится на $(dm)^2\cdot(dm)(dn)+(dn)^2$, то $91mn$ делится на m^2+mn+n^2.

Т.к. $HOD(m;n)=1,$ то $HOD\left(mn;m^2+mn+u^2\right)=1,$ значит, 91 делится на m^2+mn+n^2, следовательно, $m^2+mn+n^2=7$ или 13 или 91.

Если $m^2+mn+n^2=7,$ то $\begin{cases}m=1\\n=2\end{cases}$ *или* $\begin{cases}m=2\\n=1\end{cases}$

Если $m^2+mn+n^2=13,$ то $\begin{cases}m=1\\n=3\end{cases}$ *или* $\begin{cases}m=3\\n=1\end{cases}$

Если $m^2+mn+n^2=91,$ то $\begin{cases}m=1\\n=9\end{cases}$ *или* $\begin{cases}m=9\\n=1\end{cases}$ *или* $\begin{cases}m=5\\n=6\end{cases}$ *или* $\begin{cases}m=6\\n=5\end{cases}$

Т.к. $(10a+b)\cdot(10b+a)=a^3+(a+b)^3$, то

$(10dm+dn)(10dn+dm)=(dm)^3+\left(d(m+n)\right)^3$, значит,

$$d=\frac{(10m+n)\cdot(10n+m)}{m^3+(m+n)^3}. \qquad (*)$$

Если $m=1,\ n=2,\ \textit{то}\ d=9,$ значит, $6=18>9$?!

Если $m=2,\ n=1,\ \textit{то}\ d=7,2$ - противоречие.

Если $m=1,\ n=3,\ \textit{то}\ d=6,2$ - противоречие.

Если $m=3,\ n=1,\ \textit{то}\ d=\frac{31}{7}$ - противоречие.

Если $m=1,\ n=9,\ \textit{то}\ d=\frac{1729}{1001}$ - противоречие.

Если $m=9,\ n=1,\ \textit{то}\ d=1,$ значит, $a=9,\ b=1.$

Если $m=5,\ n=6,\ \textit{то}\ d=\frac{3640}{1456}$ - противоречие.

Если $m=6,\ n=5,\ \textit{то}\ d=\frac{3640}{1547}$ - противоречие.

9.2. На стороне треугольнике AC треугольника ABC взяты точки X_1, X_2, X_3, X_4, через которые проведены прямые параллельные сторонам CB и AB соответственно. Первые 4 из этих прямых пересекают сторону AB в точках A_1, A_2, A_3, A_4 (при этом получаются отрезки X_1A_1, X_2A_2, X_3A_3, X_4A_4), а остальные пересекают сторону CB в точках C_1, C_2, C_3, C_4 (при этом получаются отрезки X_1C_1, X_2C_2, X_3C_3, X_4C_4). Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что площади треугольников, получающихся при пересечении сторон AB, BC и названных отрезков равны соответственно S_1, S_2, S_3, S_4, S_5.

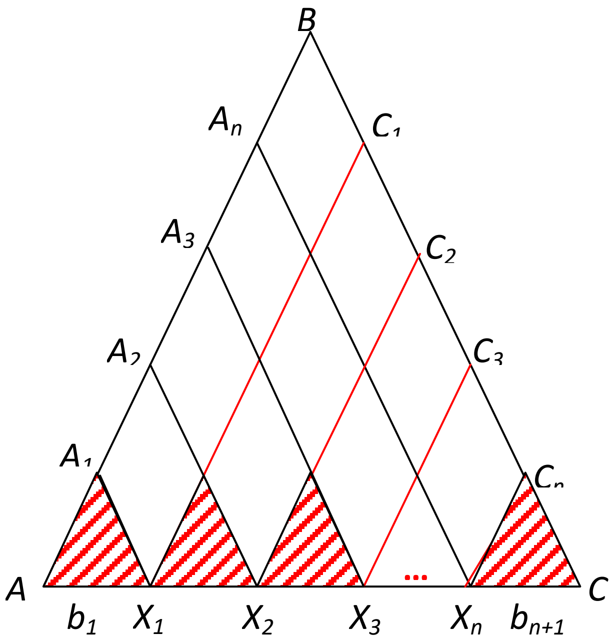
Ответ: $S=\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\ldots+\sqrt{S_5}\right)^2$

Решение: (*приведено для случая произвольного* n, *ср. аналог в варианте для 10 класса*). Обозначим площадь треугольника ABC через S, длину стороны AC через b, а длины соответствующих сторон «маленьких треугольников» $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, b_{n+1}$ (см. рисунок при n = 4)). Ввиду параллельности соответствующих прямых и равенства соответствующих углов все упомянутые треугольники подобны.

Но тогда: $\frac{b_1}{b}=\sqrt{\frac{S_1}{S}},\ \frac{b_2}{b}=\sqrt{\frac{S_2}{S}},\ \frac{b_{n+1}}{b}=\sqrt{\frac{S_{n+1}}{S}},$ и учитывая, что $b_1+b_2+b_3+\ldots+b_{n+1}=B,$ и суммируя эти равенства, получаем:

$$\frac{b_1}{b}+\frac{b_2}{b}+\ldots+\frac{b_{n+1}}{b}=1=\sqrt{\frac{S_1}{S}}+\sqrt{\frac{S_2}{S}}+\ldots+\sqrt{\frac{S_{n+1}}{S}},$$

откуда: $\sqrt{S}=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\ldots+\sqrt{S_{n+1}}$.



9.3. Сколько решений в целых неотрицательных числах имеет уравнение

$$x + 2y + 2z + 4t = 20?$$

Ответ: 161.

Решение: *t* может принимать значения от 0 до 5. Тогда x + 2*y* + 2*z* = 20 – 4t, причем x обязательно четно, т.е. x = 2p, откуда 2p + 2y + 2*z* = 20 – 4t, или *p* + *y* + *z* = 10 – 2t.

Теперь следует выяснить количество способов разложить 10 – 2t шаров по 3 коробкам, причем некоторые могут быть пустыми. Можем обозначить шары цифрой 0, а перегородки между коробками – цифрами 1. Имеем 10 – 2t нулей и 2 единицы. Всего 12 – 2t цифр. Необходимо выяснить, сколько существует способов расставить две 1 на 12 – 2t позиций, т.е. $\frac{(12-2t)\cdot(11-2t)}{2}$ вариантов при t от 0 до 5. Окончательно имеем сумму: 0,5·(12·11 + 10·9 + 8·7 + 6·5 + 4·3 + 2·1) = 66 + 45 + 28 + 15 + 6 + 1 = 161.

9.4. Из пункта A в пункт B выехал велосипедист. Весь путь разбит на пять участков. Известно, что длина второго в 8 раз больше длины четвертого. Определите среднюю скорость движения велосипедиста на всем пути, если известно, что она равна скорости движения на нечетных участках, на 4 км меньше скорости движения на втором участке и на 26 км больше половины скорости движения на четвертом участке.

Ответ. *x*=36 км/ч.

Первое решение (*основано на определении общего времени движения*).
Пусть искомая скорость движения – x км/ч, расстояние AB= S км. Тогда длина второго участка равна $8y$, четвертого $–y$, а сумма длин первого, третьего и пятого участков – $(S\text{-}9y)$. Время, затраченное велосипедистом на весь путь равно S/x; затраченное на прохождение второго участка – $8y/(x+4)$; четвертого участка – $y/(2x\text{-}52)$; первого, третьего и пятого участков вместе – $(S\text{-}9y)/x$. Тогда

$$\frac{S}{x} = \frac{8y}{x+4} + \frac{y}{2x-52} + \frac{S-9y}{x},$$

или, после упрощений, $x^2 + 16x - 1872 = 0$.

Последнее уравнение имеет единственное положительное решение $x = 36$.

Второе решение (*основано на определении средней скорости*).

Воспользуемся обозначениями из первого решения. Средняя скорость движения и скорость на втором и четвёртом участках равны:

$x = v_{ср} = \dfrac{AB}{T} = \dfrac{S}{t + t_2 + t_4}$, где $T = t + t_2 + t_4$ – общее время движения.

$v_2 = x + 4$, а $t_2 = \dfrac{8y}{x+4}$;

$v_4 = 2x - 52$, а $t_4 = \dfrac{y}{2x-52}$.

Тогда

$x = v_{ср} = \dfrac{9y + Z}{t + t_2 + t_4} = \dfrac{Z}{t} = \dfrac{9y}{t_2 + t_4}$, где Z – общая длина нечетных участков. Здесь последнее равенство следует из очевидных соображений: $(9y + Z)t = Z(t + t_2 + t_4)$.

Отсюда $x = \dfrac{9y}{\dfrac{8y}{x+4} + \dfrac{y}{2x-52}}$ или, после упрощений $x^2 + 16x - 1872 = 0$. Последнее уравнение имеет единственное положительное решение $x = 36$.