8 класс

2-й вариант

2-й тур = 2-й день

8.5. Пусть на плоскости даны 26 различных точек с целыми координатами. Докажите, что существует отрезок, соединяющий какие-то две данные точки, и на котором лежит не менее пяти точек с целыми координатами (может быть, отличных от заданных точек).

Схематическое решение. При делении на пять возможны пять остатков – 0, 1, 2, 3, 4. При делении абсцисс точек на 5 возможны пять остатков, при делении ординат точек на 5 так же возможны пять остатков, значит, различных пар остатков, полученных при делении обеих координат точек на 5 будет всего 5·5=25. Поэтому среди 26 данных точек найдется по крайней мере 2 точки, обе координаты которых при делении на 5 дают равные остатки, т.е. имеют вид: $M_1(5l_1 + r_1; 5l_2 + r_2); M_2(5m_1 +$ $+r_1; 5m_2 + r_2)$. Точки, делящие отрезок M_1M_2 на пять равных частей, будут иметь целые координаты.

8.6. Демонологу для призыва демона требуется найти такое наибольшее простое число p, что простым окажется и число $2023p^2 - 99124$. Помогите ему это сделать.

Ответ: 7.

Решение. Так как $p = 3$ не подходит, ибо тогда значение выражения $2023p^2 - 99124 < 0$ и не может быть простым числом, то p не делится на 3. Значит, при делении на 3 число p^2 дает в остатке 1, число $2023p^2$ также дает в остатке 1, а число $2023p^2 - 99124$ дает в остатке 0. Значит, простым число $2023p^2 - 99124$ может быть только, если $2023p^2 - 99124 = 3$. Тогда $2023p^2 = 99127$, $p^2 = 49$, $p = 7$.

8.7. а) $ABCD$ – трапеция ($AD \parallel BC$, $AD > BC$). M – середина стороны AB. Обозначим площадь треугольника AMD через S_1, а площадь четырехугольника $MBCD$ – через S_2. Докажите, что $1 < \frac{S_2}{S_1} < 3$.

б) $ABCD$ – трапеция ($AD \parallel BC$, $AD > BC$). M – точка на луче BA такая, что $AB:AM = n$ Обозначим площадь треугольника AMD через S_1, а площадь четырехугольника $MBCD$ – через S_2. Определите все возможные значения, которые может принимать отношение площадей $S_2 : S_1$.

Ответ. б) при $1 < n \le 2$ $\frac{S_2}{S_1} \in (n-1; 2n-1) \cup (n+1; 2n+1)$;

при $n > 2$ $\frac{S_2}{S_1} \in (n-1; 2n+1)$.

Решение. а) Пусть *BC* = *a*, *AD* = *xa*, где *x* > 1, высота *MK*, опущенная из вершины *M* треугольника *AMD* – *h*. Тогда высота трапеции *ABCD* – *BH* = 2*h*, поскольку *MK* – средняя линия треугольника *ABH*. Отсюда $S_1 = \frac{xah}{2}, S_{ABCD} = \frac{a+xa}{2} \cdot 2h = a \cdot (x+1), S_2 = S_{ABCD} - S_1 = a \cdot (x+1) - \frac{xah}{2} = \frac{ah}{2}(x+2)$. Тогда

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{x+2}{x} = 1 + \frac{2}{x}.$$

Но *x* > 0, т.е. $\frac{S_2}{S_1} > 1$. Далее, поскольку *x* >1, то $\frac{2}{x} < 2$ *и.* $\frac{S_2}{S_1} < 3$.

б) Пусть *BC* = *a*, *AD* = *xa*, где *x* > 1 *M* на стороне *AB*, высота *MK*, опущенная из вершины *M* треугольника *AMD* – *h*. Тогда высота трапеции *ABCD* – *BH* = *nh*. Отсюда $S_1 = \frac{xah}{2}, S_{ABCD} = \frac{a+xa}{2} \cdot nh = = ah(x+1)\frac{n}{2}, S_2 = S_{ABCD} - S_1 = \frac{anh}{2}(x+1) - \frac{xah}{2} = \frac{ah}{2}\big((x+1)n + n\big)$. Тогда

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{x(n-1)+n}{x} = n - 1 + \frac{n}{x}.$$

Но *x* > 0, т.е. $\frac{S_2}{S_1} > n - 1$. Далее, поскольку *x* >1, то $\frac{n}{x} < n$ и. $\frac{S_2}{S_1} < 2n - 1$.

Покажем, что для любого $k \in (n-1; 2n-1)$ уравнение $\frac{S_2}{S_1} = k$ имеет решение.

$$\frac{x(n-1)+n}{x} = k \leftrightarrow x(n-1) + n = xk \leftrightarrow x(k-n+1) = n \leftrightarrow$$

$$x = \frac{n}{k-n+1} = \frac{k-1}{k-n+1} - 1 > 0, \text{т. к. } k > n-1.$$

Это показывает, что все значения отношений площадей из указанного интервала достижимы.

Пусть теперь *M* на продолжении стороны *BA* за точку *A*. Проводя все те же выкладки, что и выше, получим $\frac{S_2}{S_1} = \frac{x(n+1)+n}{x} = n + 1 + \frac{n}{x}$. Значит,

$$n + 1 < \frac{S_2}{S_1} < 2n + 1.$$

Как и выше показывается, что все указанные значения достижимы.

Отсюда получаем

Ответ: при $1 < n \le 2$ $\frac{S_2}{S_1} \in (n-1; 2n-1) \cup (n+1; 2n+1)$;

при $n > 2$ $\frac{S_2}{S_1} \in (n-1; 2n+1)$.

8.8. Про высший совет магов известно два факта:

1) каждый член высшего совета дружит ровно с девятью другими членами высшего совета;

2) для любых девяти членов высшего совета найдется десятый, который дружит с каждым из этих девяти.

Какое максимальное число магов может быть в высшем совете магов?

Ответ: 10.

Решение. Десять быть может, если каждый член высшего совета дружит с каждым.

Покажем, что не может быть 11. Допустим противное, и в высшем совете имеется не менее 11 магов. Тогда среди них найдется двое X_1 и X_2, не дружащих друг с другом. Выберем девять членов высшего совета магов X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9. Согласно факту 2 найдется член высшего совета Y, который дружит с X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9. И точно также найдется член высшего совета Z, который дружит с X_1, Y, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9. Заметим, что Z не может быть X_2, так как X_2 не дружит с X_1. Получили, что Y нашлось 10 друзей среди членов высшего совета – это X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9 и Z. Противоречие первому факту, значит, предположение неверно и в высшем совете не имеется 11 магов.