11 класс

2-й вариант

2-й тур = 2-й день

11.5. Докажите, что при всех неотрицательных действительных значениях a, b, c выполняется неравенство:

$$64a^3 + 343b^3 + 729c^3 \geq 48a^2(7bc)^{1/2} + 294b^2(ac)^{1/2} + 162c^2(7ab)^{1/2}.$$

Решение. Как известно, $(a-b)^2 \geq 0.$ Отсюда получаем два очевидных неравенства:

$$a^2 + b^2 \geq 2ab \qquad (*)$$

и

$$a^2 - ab + b^2 \geq ab. \qquad (**)$$

Применим эти неравенства к доказательству предложенного, но для удобства сделаем следующие замены:

$$4a = x^2, \quad 7b = y^2, \quad 9c = z^2.$$

Тогда исходное неравенство равносильно $x^6 + y^6 + z^6 \geq xyz\left(x^3 + y^3 + z^3\right).$

Теперь, используя (**), имеем

$$x^6 + y^6 = \left(x^2 + y^2\right)\left(x^4 - x^2y^2 + y^4\right) \geq \left(x^2 + y^2\right)x^2y^2 .$$

Аналогично

$$x^6 + z^6 = \left(x^2 + z^2\right)\left(x^4 - x^2z^2 + z^4\right) \geq \left(x^2 + z^2\right)x^2z^2$$

и

$$y^6 + z^6 = \left(y^2 + z^2\right)\left(y^4 - y^2z^2 + z^4\right) \geq \left(y^2 + z^2\right)y^2z^2 .$$

Складывая последние три неравенства и используя (*), получаем

$$2\left(x^6 + y^6 + z^6\right) \geq x^4\left(y^2 + z^2\right) + y^4\left(x^2 + z^2\right) + z^4\left(x^2 + y^2\right) \geq$$

$$\geq x^4 \cdot 2yz + y^4 \cdot 2xz + z^4 \cdot 2xy.$$

Отсюда

$$x^6 + y^6 + z^6 \geq xyz\left(x^3 + y^3 + z^3\right).$$

11.6. Пусть a_1, a_2, b_1, b_2 – действительные числа, которые удовлетворяют соотношению $a_1a_2 = 2(b_1 + b_2)$. Докажите, что уравнение

$$x^4 + (a_1 + a_2)x^3 + (a_1a_2 + b_1 + b_2)x^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)x + b_1b_2 = 0$$

имеет по крайней мере один действительный корень.

Решение основано на разложении:

$$x^4+(a_1+a_2)x^3+(a_1a_2+b_1+b_2)x^2+(a_1b_2+a_2b_1)x+b_1b_2=$$

$$=(x^2+a_1x+b_1)\cdot(x^2+a_2x+b_2).$$

Пусть $D_1=a_1^2-4b_1$ и $D_2=a_2^2-4b_2$ – дискрименанты данных двух квадратных трёхчленов. Тогда их сумма равна

$$D_1+D_2=a_1^2-4b_1+a_2^2-4b_2=a_1^2+a_2^2-4(b_1+b_2)=a_1^2+a_2^2-2a_1a_2=(a_1-a_2)^2\geq 0.$$

Откуда и следует, что по крайней мере один из дискриминантов неотрицателен и у соответствующего квадратного уравнения есть действительные корни.

11.7. Четыре окружности B_1, B_2, B_3, B_4 расположены в одной плоскости так, что окружность B_2 касается окружности B_1, окружность B_3 касается окружности B_2, окружность B_4 касается окружности B_3, окружность B_1 касается окружности B_4. Все окружности касаются друг друга внешним образом. Докажите, что все четыре точки касания лежат на одной окружности.

Решение. Пусть O_1, O_2, O_3, O_4 – центры соответствующих окружностей. Обозначим точки касания окружностей B_1 и B_2, B_2 и B_3, B_3 и B_4, B_4 и B_1 через K, L, M, N соответственно. Необходимо доказать, что четырехугольник $KLMN$ вписанный.

Первое решение. Проведем через точки K, L, M и N касательные, общие к соответствующим парам окружностей, – k, l, m, n (рис. 1).

Треугольник O_1KN равнобедренный ($\angle O_1KN=\angle O_1NK$), поэтому углы, образованные отрезком KN с прямыми k и n, равны между собой. Обозначим их величину через α. Аналогично обозначим величины углов, которые образуют отрезки KL, LM и MN с соответствующими касательными, через β, γ и δ (рис. 1).

Для того чтобы четырехугольник был вписанным в окружность, необходимо и достаточно, чтобы суммы противолежащих углов его были равны между собой (и равны 180°). А это условие, очевидно, выполняется для четырехугольника $KLMN$, ибо

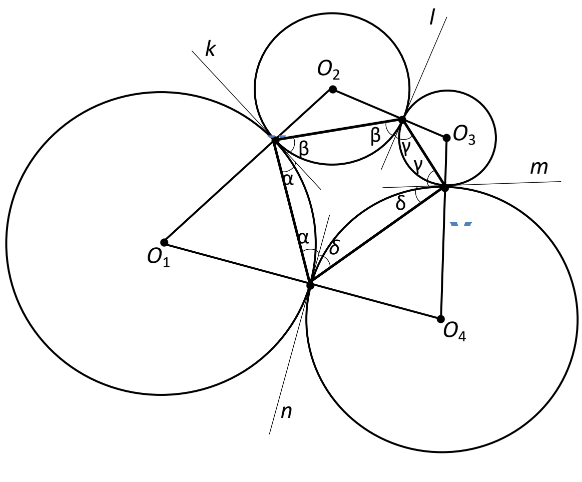

Рис. 1

$$\angle NKL+\angle LMN=\angle KLM+\angle MNK=\alpha+\beta+\gamma+\delta.$$

Второе решение. Четырехугольник $KLMN$ вписанный, если (и только если) серединные перпендикуляры к его сторонам пересекаются в одной точке. Однако серединные перпендикуляры к сторонам KN, KL, LM и MN являются биссектрисами углов NO_1K, KO_2L, LO_3M и MO_4N соответственно (рис. 2).

Осталось заметить, что так как $O_1O_2 + O_3O_4 = O_2O_3 + O_4O_1 = = R_1 + R_2 + R_3 + R_4$ (R_1, R_2, R_3, R_4 – радиусы окружностей B_1, B_2, B_3, B_4 соответственно), то четырехугольник $O_1O_2O_3O_4$ является описанным, и поэтому его биссектрисы пересекаются в одной точке.

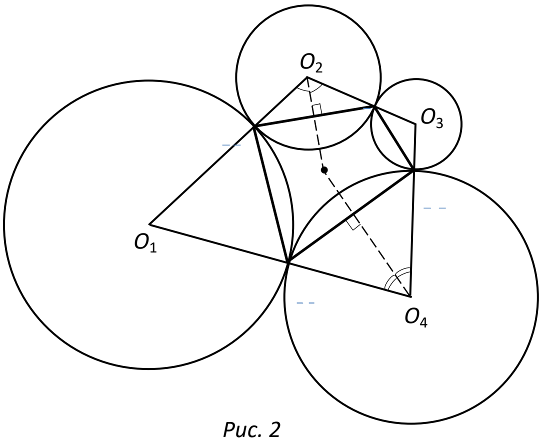

Рис. 2

11.8. Про высший совет магов известно два факта:

1) каждый член высшего совета дружит ровно с n другими членами высшего совета;

2) для любых n членов высшего совета найдется (n+1)-й, который дружит с каждым из этих n.

Какое максимальное число магов может быть в высшем совете магов?

Ответ: n+1.

Решение. n+1 быть может, если каждый член высшего совета дружит с каждым. Покажем, что в совете не может быть (n+2)–го мага. Допустим противное, и в высшем совете имеется не менее (n+2)–х магов. Тогда среди них найдется двое X_1 и X_2, не дружащих друг с другом. Выберем n членов высшего совета магов X_1, X_2, X_3, …, X_{n-1} X_n. Согласно факту 2 найдется член высшего совета Y, который дружит с X_1, X_2, X_3, …, X_{n-1} X_n. И точно также найдется член высшего совета Z, который дружит с X_1, Y, X_3, …, X_{n-1} X_n. Заметим, что Z не может быть X_2, так как X_2 не дружит с X_1. Получили, что у Y нашлись (n+1) друг среди членов высшего совета – это X_1, X_2, X_3, …, X_{n-1} X_n и Z. Получили противоречие первому факту, значит, предположение неверно и в высшем совете не имеется (n+2) магов.