11 класс

2-й вариант

1-й тур = 1-й день

11.1. Сколько решений в целых неотрицательных числах имеет уравнение

$$x + 3y + 3z + 9w = 45?$$

Ответ: 321.

Решение: w может принимать значения от 0 до 5. Тогда x + 32y + 3z = 45 – 9w, причем x обязательно кратно 3, т.е. x = 3p, откуда 3p + 3y + 3z = 45 – 9w, или $p + y + z = 15 – 3w$.

Теперь следует выяснить количество способов разложить 15 – 3w шаров по 3 коробкам, причем некоторые могут быть пустыми. Можем обозначить шары цифрой 0, а перегородки между коробками – цифрами 1. Имеем 15 – 3w нулей и 2 единицы. Всего 17 – 3w цифр. Необходимо выяснить, сколько существует способов расставить две 1 на 17 – 3w позиции, т.е. $\frac{(17-3w)\cdot(16-3w)}{2}$ вариантов при w от 0 до 5. Окончательно имеем сумму: 0,5·(17·16 + 14·13 + 11·10 + 8·7 + 5·4 + 2·1) = 136 + 91 + 55 + 28 + 10 + 1 = 321.

11.2. Найдите функции $f(x)$ и $g(x)$, удовлетворяющие системе уравнений:

$$\begin{cases} f(2x+2) + 2g(4x+7) = x-1, \\ f(x-1) + g(2x+1) = 2x \end{cases}.$$

Ответ. $f(x) = 0{,}5\cdot(7x+12)$, $g(x) = -0{,}25\cdot(3x+7)$.
Решение. Сделаем в первом уравнении системы замену $2x+2 = t$, а во втором замену $x–1 = t$. Из исходной системы получим:

$$\begin{cases} f(t) + 2g(2t+3) = (t-4)/2, \\ f(t) + g(2x+3) = 2t+2 \end{cases}$$

Из последней системы находим: $f(t) = 0{,}5\cdot(7t+12)$, $g(2t + 3) = 0{,}5\cdot(-3t - 8)$, возвращаясь к переменной x получаем ответ.
Проверка подтверждает, что полученные функции удовлетворяют исходной системе.

11.3. Дан острый угол и точка K внутри него. Постройте прямую, проходящую через точку K и отсекающую от угла треугольник наименьшей площади.

Решение. Пусть дан угол *MOL* и точка *K* внутри него. Через точку *K* проведем прямые, параллельные сторонам угла, и обозначим $OA = a$, $OB = b$ (см. рис.).

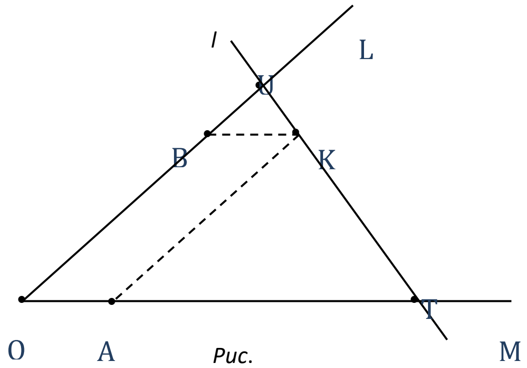

Рис.

Пусть прямая *l* проходит через точку *K* и пересекает стороны *OM* и *OL* угла в точках *T* и *U* соответственно. Тогда площадь треугольника *TOU* будет равна $\frac{1}{2}TO\cdot OU\cdot\sin\varphi$, где φ – величина угла *MOL*. Если положить $AT = x,\ BU = y$, то $S_{TOU} = \frac{1}{2}(a+x)(b+y)\sin\varphi.$

Заметим, что треугольник *ATK* подобен треугольнику *BUK*, поэтому $BU/AK = BK/AT$ или $y/b = a/x$. Отсюда находим, что $y = ab/x$, и, следовательно,

$$S_{TOU} = \frac{1}{2}(a+x)\left(b+\frac{ab}{x}\right)\sin\varphi = \frac{b\sin\varphi}{2}(a+x)\left(1+\frac{a}{x}\right).$$

Так как $(b\sin\varphi)/2 = \mathrm{const}$, то остается исследовать на минимум функцию

$$S(x) = (a+x)\left(1+\frac{a}{x}\right) = 2a + x + \frac{a^2}{x},\ x > 0.$$

Заметим, что $x + a^2/x = a(x/a + a/x) \geq 2a$, причем равенство достигается при $x = a$.

(Или по-другому: имеем $S'(x) = 1 - \frac{a^2}{x^2} = \frac{x+a}{x^2}(x-a)$. Таким образом, $S'(x) = 0$ при $x = a$, и производная при переходе через точку a меняет знак с «–» на «+».)

Следовательно, $x = a$ – точка минимума этой функции.

Построить треугольник наименьшей площади можно следующим образом: на стороне *OM* угла откладывается отрезок $AT = OA$. Прямая *TK* – искомая.

11.4. Два бегуна стартуют из одной точки кольцевой дорожки стадиона, третий бегун стартует одновременно с ними в том же направлении из диаметрально противоположной точки. Пробежав три круга, третий бегун впервые после старта до-гнал второго. Через 2,5 мин после этого первый бегун впервые догнал третьего. Сколько кругов в минуту пробегает второй бегун, если первый обгоняет его один раз каждые 6 мин?

Ответ: $\frac{1}{2}$ круга в минуту.

Решение. Обозначим v_1, v_2, v_3 – скорости первого, второго и третьего бегунов соответственно; за начало отсчета примем момент старта. Время будем измерять в минутах, а расстояние – в кругах (скорость соответственно – в круг/мин). Условия задачи здесь четко разделены и их можно представить в виде системы (математической модели):

1) $v_3 \cdot t_1 = 3$ (круга) (t_1 – момент, когда третий бегун догонит второго);

2) $v_2 \cdot t_1 = 2{,}5$ (круга);

3) $v_1 \cdot (t_1 + 2{,}5) = v_3 \cdot (t_1 + 2{,}5) + 0{,}5$ (через 2,5 мин первый догонит третьего, т. е. пробежит на полкруга больше);

4) $6v_1 = 6v_2 + 1$ (за каждые 6 мин первый пробегает на круг больше второго).

Необходимо найти v_2.

Из 1) и 2) имеем: $5v_3 = 6v_2$. Выражая t_1 из 1) и подставляя в 3), получаем

$$v_1\left(\frac{3}{v_3} + 2{,}5\right) = 2{,}5v_3 + 3{,}5.$$

После упрощений получаем следующую систему:

$$\begin{cases} 5v_3 = 6v_2, \\ 6v_1 = 6v_2 + 1, \\ 6v_1 + 5v_1v_3 = 7v_3 + 5v_3^2, \end{cases}$$

которую решаем методом подстановки неизвестных v_3 и v_1 из первых двух уравнений в третье. Таким образом, получаем

$$6v_2 + 1 + 6v_2\left(v_2 + \frac{1}{6}\right) = 7 \cdot \frac{6}{5}v_2 + 5\left(\frac{6}{5}v_2\right)^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 6v_2^2 + 7v_2 - 5 = 0,$$

откуда имеем два корня: $v_2 = \frac{1}{2}$ или $v_2 = -\frac{5}{3}$. Отрицательный корень не подходит по смыслу задачи.