10 класс

2-й вариант

2-й тур = 2-й день

10.5. Докажите, что при всех неотрицательных действительных значениях a, b, c выполняется неравенство:

$$a^3 + 64b^3 + 729c^3 \geq 6a^2(bc)^{1/2} + 48b^2(ac)^{1/2} + 162c^2(ab)^{1/2}.$$

Решение. Как известно, $(a-b)^2 \geq 0.$ Отсюда получаем два очевидных неравенства:

$$a^2 + b^2 \geq 2ab \qquad (*)$$

и

$$a^2 - ab + b^2 \geq ab. \qquad (**)$$

Применим эти неравенства к доказательству предложенного, но для удобства сделаем следующие замены:

$$a = x^2, \quad 4b = y^2, \quad 9c = z^2.$$

Тогда исходное неравенство равносильно $x^6 + y^6 + z^6 \geq xyz\left(x^3 + y^3 + z^3\right).$

Теперь, используя (**), имеем

$$x^6 + y^6 = \left(x^2 + y^2\right)\left(x^4 - x^2y^2 + y^4\right) \geq \left(x^2 + y^2\right)x^2y^2 .$$

Аналогично

$$x^6 + z^6 = \left(x^2 + z^2\right)\left(x^4 - x^2z^2 + z^4\right) \geq \left(x^2 + z^2\right)x^2z^2$$

и

$$y^6 + z^6 = \left(y^2 + z^2\right)\left(y^4 - y^2z^2 + z^4\right) \geq \left(y^2 + z^2\right)y^2z^2 .$$

Складывая последние три неравенства и используя (*), получаем

$$2\left(x^6 + y^6 + z^6\right) \geq x^4\left(y^2 + z^2\right) + y^4\left(x^2 + z^2\right) + z^4\left(x^2 + y^2\right) \geq$$

$$\geq x^4 \cdot 2yz + y^4 \cdot 2xz + z^4 \cdot 2xy.$$

Отсюда

$$x^6 + y^6 + z^6 \geq xyz\left(x^3 + y^3 + z^3\right).$$

10.6. Пусть $P(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что если $P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = p$, где a, b, c и d – различные целые числа, p – простое число, то многочлен $P(x)$ не имеет целых корней.

Решение. Рассмотрим сначала многочлен, равный $P(x) - p$ с целыми коэффициентами, который имеет различные целые корни a, b, c и d. Тогда $P(x) - \mathrm{p} = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)Q(x)$, где $Q(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами.

Для того чтобы показать, что у многочлена $Q(x)$ целые коэффициенты участникам достаточно проанализировать последовательное деление «столбиком» многочлена $P(x) - p$ на приведенные линейные двучлены $(x - a)$, $(x - b)$ и т.д.

Допустим теперь, что многочлен $P(x)$ имеет целый корень y. Тогда $P(y) = 0$, а $-p = (y-a)(y-b)(y-c)(y-d)Q(y)$. Заметим, что хотя бы четыре из пяти **множителей** в правой части различные: $(y-a)$, $(y-b)$, $(y-c)$ и $(y-d)$. Но в этом случае (даже если некоторые из этих множителей могут равняться «1», «–1» и «p») равенство невозможно. Значит многочлен $P(x)$ не имеет целых корней.

10.7. Пусть на плоскости даны 2023 различных точек с целыми координатами. Докажите, что существует отрезок, соединяющий какие-то две данные точки, и на котором лежит не менее 44 точек с целыми координатами (с учетом концевых точек; при этом все эти 44 точки не обязательно входят в число заданных).

Схема решения. Поскольку даже с учетом «концевых точек» отрезок должен содержать 44 точки с целыми координатами, то всего на отрезке будет 7 «целочисленных» точек. При делении на 44 возможны 44 остатка – 0, 1, 2, 3, ..., 43. При делении абсцисс точек на 44 возможны 44 остатка, при делении ординат точек на 44 так же возможны 44 остатка, значит, различных пар остатков, которые можно полученных при делении обеих координат точек на 44 будет всего $44 \times 44 = 1936$. Поэтому если точек будет 2023, то среди них найдется по крайней мере две точки, обе координаты которых при делении на 44 дают равные остатки, т.е. имеют вид: $M_1(44l_1 + r_1; 44l_2 + r_2)$, $M_2(44m_1 + r_1; 44m_2 + r_2)$. Точки, делящие отрезок M_1M_2 на 44 равные части, будут иметь целые координаты.

10.8. Про высший совет магов известно два факта:

1) каждый член высшего совета дружит ровно с 2022 другими членами высшего совета;

2) для любых 2022 членов высшего совета найдется 2023-й, который дружит с каждым из этих 2022.

Какое максимальное число магов может быть в высшем совете магов?

Ответ: 2023.

Решение. 2023 быть может, если каждый член высшего совета дружит с каждым. Покажем, что не может быть 2023. Допустим противное, и в высшем совете имеется не менее 2023 магов. Тогда среди них найдется двое X_1 и X_2, не дружащих друг с другом. Выберем 2022 членов высшего совета магов X_1, X_2, X_3, …, X_{2021}, X_{2022}. Согласно факту 2 найдется член высшего совета Y, который дружит с X_1, X_2, X_3, …, X_{2021}, X_{2022}. И точно также найдется член высшего совета Z, который дружит с X_1, Y, X_3, …, X_{2021}, X_{2022}. Заметим, что Z не может быть X_2, так как X_2 не дружит с X_1. Получили, что Y нашлось 2023 друга среди членов высшего совета – это X_1, X_2, X_3, …, X_{2021}, X_{2022} и Z. Получили противоречие первому факту, значит, предположение неверно и в высшем совете не имеется 2023 магов.