10 класс

2-й вариант

1-й тур = 1-й день

10.1. Сколько решений в целых неотрицательных числах имеет уравнение $x+3y+9z=900$?

Ответ: 15150.

Решение: z может принимать значения от 0 до 100. Тогда x + 3y = 900 – 9z, причем x обязательно кратно 3, т.е. x = 3p, откуда 3p + 3y = 900 – 9z, или p + y = 300 – 3z.

При каждом p от 0 до 300 – 3z неизвестная y принимает единственное значение. Таким образом, при каждом z от 0 до 100 существует 300 – 3z решений. Осталось просуммировать значения 0 + 2 + 4 + 6 + ... + 500 = 0,5(500+2)·250 = 15150.

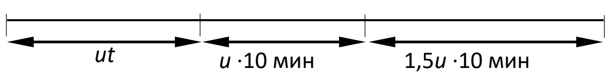
10.2. Человек шел домой вверх по течению ручья со скоростью в 1,5 раза большей, чем скорость течения. В руках у него были шляпа и палка. Он бросил в ручей шляпу, перепутав ее с палкой, и продолжал идти с той же скоростью некоторое время. Вскоре он заметил ошибку, швырнул в ручей палку и побежал назад со скоростью вдвое большей, чем шел вперед. Догнав плывущую шляпу, он мгновенно выудил ее из воды, повернулся и пошел вверх по течению с первоначальной скоростью. Через 10 мин человек встретил плывущую по ручью палку. На сколько минут раньше он пришел бы домой, если бы не перепутал шляпу с палкой?

Ответ: 37,5 мин.

Решение. Пусть u – скорость течения реки (и соответственно шляпы и палки по воде), тогда скорость человека вверх по течению – 1,5u, вниз по течению – 3u. Пусть человек, бросившись в погоню за шляпой, сделал зарубку на дереве, а когда догнал ее, то сделал вторую зарубку. Расстояние между зарубками обозначим a. Потерянное время складывается из движения в одну сторону $t=\frac{a}{3u}$ и в другую $\frac{a}{1{,}5u}=\frac{2a}{3u}$, т. е. равно $\frac{a}{u}$ (очевидно, $u\neq 0$). Однако это расстояние a, с одной стороны, равно

$$a=3ut \quad (t \text{ – время возвращения}),$$

а с другой стороны, складывается из следующих участков движения (рис. 17): A – движение палки по течению за время t возвращения человека за шляпой; B – движение палки навстречу человеку в течение 10 мин; C – движение человека после поворота до встречи с палкой в течение 10 мин, т. е. $a=ut+u\cdot 10\text{ мин}+1{,}5u\cdot 10\text{ мин}$.



Итак, имеем систему

$$\begin{cases} a = 3ut, \\ a = ut + 25u. \end{cases}$$

Откуда легко получаем: $\dfrac{a}{u} = 37{,}5$ мин.

10.3. На стороне треугольнике AC треугольника ABC взяты точки X_1, X_2, …, X_n, через которые проведены прямые параллельные сторонам CB и AB соответственно. Первые n из этих прямых пересекают сторону AB в точках A_1, A_2, …, A_n (при этом получаются отрезки X_1A_1, X_2A_2, …, X_nA_n), а остальные пересекают сторону CB в точках C_1, C_2, …, C_n (при этом получаются отрезки X_1C_1, X_2C_2, …, X_nC_n). Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что площади треугольников, получающихся при пересечении сторон AB, BC и названных отрезков равны соответственно S_1, S_2, …, S_n, S_{n+1}.

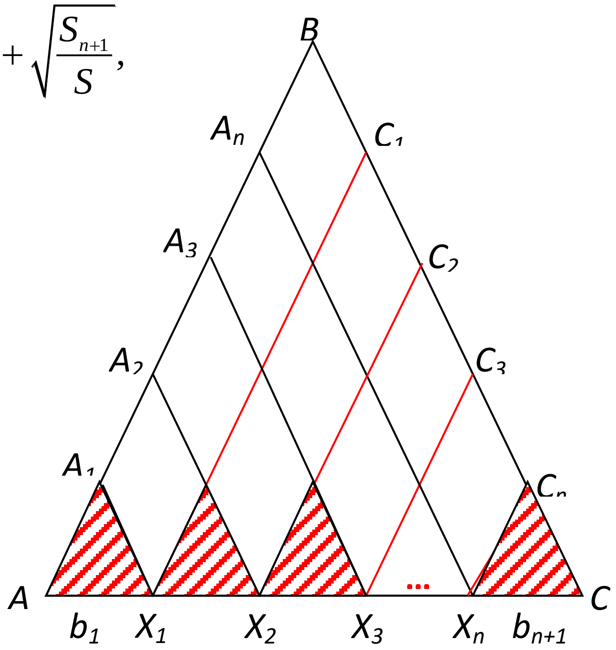
Ответ: $\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \ldots + \sqrt{S_{n+1}}$

Решение. Обозначим площадь треугольника ABC через S, длину стороны AC через b, а длины соответствующих сторон «маленьких треугольников» $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, b_{n+1}$ (см. рисунок при n = 4)). Ввиду параллельности соответствующих прямых и равенства соответствующих углов все упомянутые треугольники подобны.

Но тогда: $\dfrac{b_1}{b} = \sqrt{\dfrac{S_1}{S}}$, $\dfrac{b_2}{b} = \sqrt{\dfrac{S_2}{S}}$, $\dfrac{b_{n+1}}{b} = \sqrt{\dfrac{S_{n+1}}{S}}$, и учитывая, что $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n+1} = B,$ и суммируя эти равенства, получаем:

$$\frac{b_1}{b} + \frac{b_2}{b} + \ldots + \frac{b_{n+1}}{b} = 1 = \sqrt{\frac{S_1}{S}} + \sqrt{\frac{S_2}{S}} + \ldots + \sqrt{\frac{S_{n+1}}{S}},$$

откуда: $\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \ldots + \sqrt{S_{n+1}}$.



10.4. Найдите функции $f(x)$ и $g(x)$, удовлетворяющие системе уравнений:

$$\begin{cases} f(2x+1)+2xg(2x+1)=4x, \\ f\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)+g\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)=2x-1 \end{cases}.$$

Ответ. $f(x)=\frac{2-2x}{x-1}$; $g(x)=\frac{2x}{x-1}$

Решение. Сделаем в первом уравнении замену $2x+1=t$, а во втором $\frac{2x+1}{2x-1}=t$. Тогда исходная система преобразуется к виду:

$$\begin{cases} f(t)+(t-1)\cdot g(t)=2t-2, \\ f(t)+g(t)=\frac{t+1}{t-1}-1 \end{cases}.$$

Решая эту систему получим искомые функции; проверка показывает, что они удовлетворяют системе.