Вариант 2
Задания теоретического тура

Задание 1. Антиподы. (20 баллов)

Два антипода одного роста в одни и те же сутки 2022 года наблюдали прохождение Солнца через небесный меридиан в течение $\tau = 141{,}7\,c$. Измеренный угловой диаметр Солнца в момент наблюдения был равен $d'' = 1950{,}1''$. Тень, которую отбрасывал первый антипод, длиннее, чем тень, которую отбрасывал второй антипод, в два раза.

а) В какую дату происходили данные наблюдения?

б) На каких географических широтах находились первый и второй антиподы соответственно?

в) Как двигалось Солнце относительно первого и второго наблюдателя?

г) Во сколько раз продолжительность дня (во время наблюдения) для первого наблюдателя была больше, чем для второго?

Подсказка: изменением экваториальных координат Солнца пренебречь.

Решение:

а) Рассчитаем склонение Солнца в момент наблюдения:

$$\cos\delta = \frac{d''}{15\tau} = \frac{1950{,}1}{15\cdot 141{,}7}$$

Поскольку угловой диаметр Солнца большой – это около зимнего солнцестояния.
Склонение Солнца:

$$\delta = a\cos\left(\frac{1950{,}1}{15\cdot 141{,}7}\right) = -23°26'23''.$$

Зимнее солнцестояние: 22.12.2022.

б) Тень от первого наблюдателя в два раза длиннее, чем от второго, поэтому:

$$\frac{\tan(|\delta-\varphi_1|)}{\tan(|\delta-\varphi_2|)} = \frac{\tan(|\delta-\varphi_1|)}{\tan(|\delta+\varphi_1|)} = 2.$$

Нажимаем на кнопки калькулятора: $\varphi_1 = 7°2'27''$, $\varphi_2 = -7°2'27''$.

в) Оба наблюдателя видят Солнце к югу от зенита, следовательно, оно движется относительно них справа налево.

г) Найдем продолжительность дня для каждого наблюдателя с учетом, естественно, размеров его диска и рефракции:

$$\Delta t_1 = 2\cdot a\cos\left(\frac{\cos(90° + 35' + 975'') - \sin\delta\cdot\sin\varphi_1}{\cos\delta\cdot\cos\varphi_1}\right) = 11^h 42^m 57^s$$

$$\Delta t_2 = 2\cdot a\cos\left(\frac{\cos(90° + 35' + 975'') - \sin\delta\cdot\sin\varphi_2}{\cos\delta\cdot\cos\varphi_2}\right) = 12^h 32^m 5^s.$$

Отсюда: $\dfrac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = 0{,}935$.

Ответ: а) $\delta = -23°26'23''$ – 22.12.2022; б) $\varphi_1 = 7°2'27''$, $\varphi_2 = -7°2'27''$;

в) «справа налево»; г) $\dfrac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = 0{,}935$.

Задание 2. Расстыковка. (20 баллов)

Космический аппарат (КА) с общей массой M, состоящий из двух автоматических модулей, движется по круговой орбите вокруг Солнца. В некоторый момент произошло отсоединение модуля с меньшей массой m_2 со скоростью $u = 2{,}2\,\frac{км}{с}$ относительно другого, направленной по касательной к орбите КА. После отсоединения оба модуля стали двигаться по разным эллиптическим орбитам с одинаковым эксцентриситетом $e = 0{,}72$ в одном направлении, причем меньший модуль – по меньшей орбите.

а) Вычислите отношение масс $\frac{m_1}{m_2}$ автоматических модулей.

б) Вычислите приращения скоростей Δv_1 и Δv_2 (в $\frac{км}{с}$) автоматических модулей сразу после отсоединения.

в) Определите радиус a_0 (а.е.) круговой орбиты КА до отсоединения модулей.

г) Найдите отношение периодов $\frac{T_1}{T_2}$ обращения модулей вокруг Солнца.

Подсказка: закон сохранения импульса самый главный.

Решение:

а) Запишем интегралы энергии для данных модулей: $\begin{cases} v_1^2 = v_0^2(1+e) \\ v_2^2 = v_0^2(1-e) \end{cases}$.

Закон сохранения импульса в системе, связанной с (KA): $\frac{v_1 - v_0}{v_0 - v_2} = \frac{m_2}{m_1}$.

Отсюда: $\frac{m_1}{m_2} = \frac{1-\sqrt{1-e}}{\sqrt{1+e}-1} = \frac{1-\sqrt{1-0{,}72}}{\sqrt{1+0{,}72}-1} = 1{,}512$.

б) Относительная скорость: $u = \Delta v_1 + \Delta v_2$, $\frac{\Delta v_2}{\Delta v_1} = 1{,}512$

$$\Delta v_1 = \frac{u}{1+1{,}512} = \frac{2{,}2}{2{,}512} = 0{,}876\,\frac{км}{с}, \quad \Delta v_2 = 1{,}512\Delta v_1 = 1{,}512 \cdot 0{,}876 = 1{,}324\,\frac{км}{с}.$$

в) Ранее получено: $\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} = \sqrt{\frac{1+0{,}72}{1-0{,}72}} = 2{,}479$.

$$\frac{v_0 + \Delta v_1}{v_0 - \Delta v_2} = 2{,}47848 \Rightarrow v_0 = \frac{\Delta v_1 + 2{,}47848\Delta v_2}{1{,}47848} = \frac{0{,}876 + 2{,}47848 \cdot 1{,}324}{1{,}47848} = 2{,}81\,\frac{км}{с}$$

$$a_0 = \left(\frac{29{,}8}{2{,}81}\right)^2 = 112\,а.е.$$

г) Третий закон Кеплера:

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{a_1^3}{a_2^3}} = \sqrt{\frac{(1+e)^3}{(1-e)^3}} = \sqrt{\frac{(1+0{,}72)^3}{(1-0{,}72)^3}} = 15{,}22.$$

Ответ: а) $\frac{m_1}{m_2} = 1{,}512$; б) $\Delta v_1 = 0{,}876\,\frac{км}{с}$, $\Delta v_2 = 1{,}324\,\frac{км}{с}$; в) $a_0 = 112\,а.е.$;

г) $\frac{T_1}{T_2} = 15{,}22$.

Задание 3. Фотометрия бесконечности. (20 баллов)

Вблизи луча зрения, на одинаковом $r = 9\,пк$ расстоянии от наблюдателя, находящегося на Земле, и друг от друга последовательно находится бесконечно большое количество солнцеподобных звезд. Используя значение солнечной постоянной $b_0 = 1370\,\frac{Вт}{м^2}$:

а) Определите освещенность $b_7\left(\frac{Вт}{м^2}\right)$, создаваемую седьмой по счету от наблюдателя звездой.

б) Вычислите, на сколько единиц суммарная звездная величина 11-й и 21-й звезд меньше суммарной звездной величины 51-й и 61-й звезд?

в) Получите выражение для определения освещенности, создаваемой всеми звездами в единицах (b_0, r).

г) Используя выражение, полученное в пункте в) рассчитайте суммарную видимую звездную величину всех звезд.

Подсказка: «базельская» задача Вам в помощь.

Решение:

а) Освещенность от седьмой по счету от наблюдателя звезды находим по формуле:

$$b_7 = \frac{b_0}{(7\cdot 9\cdot 206265)^2} = \frac{1370}{(7\cdot 9\cdot 206265)^2} = 8{,}11\cdot 10^{-12}\,\frac{Вт}{м^2}.$$

б) Рассчитаем $b_{11} + b_{21}$ и $b_{51} + b_{61}$ соответственно:

$$b_{11} + b_{21} = \frac{1370}{(11\cdot 9\cdot 206265)^2} + \frac{1370}{(21\cdot 9\cdot 206265)^2} = 4{,}19\cdot 10^{-12}\,\frac{Вт}{м^2},$$

$$b_{51} + b_{61} = \frac{1370}{(51\cdot 9\cdot 206265)^2} + \frac{1370}{(61\cdot 9\cdot 206265)^2} = 2{,}60\cdot 10^{-13}\,\frac{Вт}{м^2}.$$

Применим формулу Погсона:

$$m_{11+21} - m_{51+61} = 2{,}5\cdot \lg\left(\frac{b_{51} + b_{61}}{b_{11} + b_{11}}\right) = 2{,}5\cdot \lg\left(\frac{2{,}50\cdot 10^{-13}}{3{,}86\cdot 10^{-12}}\right) = -3{,}02.$$

в) Используем очевидное соотношение: $b = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots = b_1\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots\right)$.

В скобках имеем бесконечный ряд, нахождение суммы которого составляет содержание «базельской» задачи, которую впервые успешно решил Эйлер:

$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$. (ссылка: https://www.youtube.com/watch?v=d-o3eB9sfls)

Здесь $b_1 = \frac{b_0}{(206265\cdot r)^2}$, поэтому: $b = \frac{\pi^2 b_0}{6\cdot(206265\cdot r)^2}$.

г) Подставим значения $b_0 = 1370\,\frac{Вт}{м^2}$ и $r = 9\,пк$: $b = \frac{\pi^2\cdot 1370}{6\cdot(206265\cdot 9)^2} = 6{,}54\cdot 10^{-10}\,\frac{Вт}{м^2}$.

Общая звездная величина: $m = m_0 + 2{,}5\lg\frac{b_0}{b} == -26{,}74 + 2{,}5\lg\frac{1370}{6{,}54\cdot 10^{-10}} = 4{,}06^m$.

Ответ: а) $b_7 = 8{,}11\cdot 10^{-12}\,\frac{Вт}{м^2}$; б) $m_{11+21} - m_{51+61} = -3{,}02$;

в) $b = \frac{\pi^2 b_0}{6\cdot(206265\cdot r)^2}$; г) $m = 4{,}06^m$.

Задание 4. Газовое облако. (20 баллов)

В межзвёздной среде обнаружено облако молекулярного водорода сферической формы с концентрацией частиц газа $n_0 = 100\,см^{-3}$ и температурой газа $T_0 = 20\,K$.

а) Объясните, почему будет происходить гравитационное сжатие газового облака с радиусом $R_0 = 2{,}2\,пк$.

б) Определите минимальный радиус $R_{\min}$ (в пк) облака (при заданных n_0 и T_0), которое еще сможет сжиматься под действием гравитации.

в) Оцените количество выделившейся гравитационной энергии при сжатии облака с параметрами n_0, T_0 и R_0 в два раза (по радиусу).

г) На сколько кельвинов при этом изменится температура облака газа?

Подсказка: используйте теорему о вириале:

Решение:

а) Плотность газового облака:

$$\rho_0 = n_0 \cdot \frac{\mu}{N_A} = 100 \cdot 10^6 \frac{2 \cdot 10^{-3}}{6{,}02 \cdot 10^{23}} = 3{,}32 \cdot 10^{-19} \frac{кг}{м^3}.$$

Полная энергия:

$$E = \frac{3}{2}\nu RT_0 - \frac{3}{5}\frac{GM^2}{R_0} = 2\pi R_0^3 \rho_0 \frac{R \cdot T_0}{\mu} - \frac{3}{5}G\frac{16}{9}\pi^2 R_0^5 \rho_0^2 =$$

$$= 2\pi\left(6{,}79 \cdot 10^{16}\right)^3 \cdot 3{,}32 \cdot 10^{-19} \cdot 8{,}31 \cdot 20 \cdot 500 - \frac{48}{45} \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \pi^2 \cdot \left(6{,}79 \cdot 10^{16}\right)^5 \left(3{,}32 \cdot 10^{-19}\right)^2 =$$

$$= -5{,}75 \cdot 10^{37}\,Дж$$

б) Полная энергия равна нулю:

$$\frac{3}{2}\frac{M}{\mu}RT_0 = \frac{3}{5}\frac{GM^2}{R_{МИН}}$$

$$R_{МИН} = \sqrt{\frac{15RT_0}{8\pi G\rho_0\mu}} = \sqrt{\frac{15 \cdot 8{,}31 \cdot 20}{8 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \pi \cdot 3{,}32 \cdot 10^{-19} \cdot 2 \cdot 10^{-3}}} = 4{,}73 \cdot 10^{16}\,м = 1{,}53\,пк$$

в) Изменение гравитационной энергии при сжатии в два раза:

$$\Delta E_G = -\frac{3}{5}\frac{2GM^2}{R_0} - \left(-\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R_0}\right) = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R_0} =$$

$$= -\frac{48}{45} \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \pi^2 \cdot \left(6{,}17 \cdot 10^{16}\right)^5 \left(3{,}32 \cdot 10^{-19}\right)^2 = -1{,}12 \cdot 10^{38}\,Дж$$

г) По теореме вириала: $\Delta E_G + 2\Delta E_K = 0$

$$\Delta T = \frac{4\pi G R_0^2 \mu \rho_0}{15R} = \frac{4\pi \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \left(6{,}79 \cdot 10^{16}\right)^2 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 3{,}32 \cdot 10^{-19}}{15 \cdot 8{,}31} = 21\,K.$$

Ответ: а) $E = -5{,}75 \cdot 10^{37}\,Дж$; б) $R_{МИН} = 4{,}73 \cdot 10^{16}\,м = 1{,}53\,пк$;
в) $\Delta E_G = -1{,}12 \cdot 10^{38}\,Дж$; г) $\Delta T = 21\,K$.

Задание 5. Вселенная. (20 баллов)

Поверим одной из современных гипотез, в которой предложена следующая периодизация в развитии Вселенной:

а) инфляционная стадия $\left(t_1 = 10^{-34}\,c \div t_2 = 10^{-32}\,c\right)$;

б) радиационное доминирование $\left(t_2 = 10^{-32}\,c \div t_3 = 70000\,лет\right)$;

в) пылевая стадия $\left(t_3 = 70000\,лет \div t_4 = 7{,}9\,млрд.лет\right)$;

г) Λ – доминирование $\left(t_4 = 7{,}9\,млрд.лет \div t_5 = настоящее время\right)$.

Во сколько раз масштабный фактор $a(t)$ в конце каждого из четырех вышеперечисленных периодов больше, чем в его начале?

Используйте в решении значения следующих величин:

плотность во время инфляции $\rho_{инф} = 6{,}6 \cdot 10^{76}\,\frac{кг}{м^3}$;

плотность Λ-члена: $\rho_{\Lambda} = 8{,}51 \cdot 10^{-27}\,\frac{кг}{м^3}$.

Подсказка: используйте первую линию Интернета.

Решение: Используем то, что приведено в первой линии Интернета:

Стадия	Эволюция $a(\eta)$	Параметр Хаббла
Инфляционная	$a \propto e^{Ht}$	$H^2 = \frac{8\pi}{3}\frac{\rho_{vac}}{M_{pl}^2}$
Радиационное доминирование p=ρ/3	$a \propto t^{\frac{1}{2}}$	$H = \frac{1}{2t}$
Пылевая стадия p=const	$a \propto t^{\frac{2}{3}}$	$H = \frac{2}{3t}$
Λ-доминирование	$a \propto e^{Ht}$	$H^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho_{\Lambda}$

С учетом данных, приведенные в условии, получим:

а) $H_1 = \sqrt{\frac{8\pi}{3}G\rho_{инфл}} = 6{,}07 \cdot 10^{33}\,c^{-1}$

$$\frac{a_2}{a_1} = \exp\{H_1(t_2 - t_1)\} = \exp\{6{,}07 \cdot 10^{33}(10^{-32} - 10^{-34})\} = 1{,}29 \cdot 10^{26};$$

б) $\frac{a_3}{a_2} = \sqrt{\frac{t_3}{t_2}} = \sqrt{\frac{2{,}21 \cdot 10^{12}}{1 \cdot 10^{32}}} = 1{,}49 \cdot 10^{22}$; в) $\frac{a_4}{a_3} = \left(\frac{t_4}{t_3}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{2{,}49 \cdot 10^{17}}{2{,}21 \cdot 10^{12}}\right)^{\frac{2}{3}} = 2{,}34 \cdot 10^{3}$;

г) $H_5 = \sqrt{\frac{8\pi}{3}G\rho_{\Lambda}} = 2{,}18 \cdot 10^{-18}\,c^{-1}$

$$\frac{a_5}{a_4} = \exp\{H_5(t_5 - t_4)\} = \exp\{2{,}18 \cdot 10^{-18}(4{,}58 \cdot 10^{17} - 2{,}49 \cdot 10^{17})\} = 1{,}58.$$

Ответ: а) $\frac{a_2}{a_1} = 1{,}29 \cdot 10^{26}$; б) $\frac{a_3}{a_2} = 1{,}49 \cdot 10^{22}$; в) $\frac{a_4}{a_3} = 2{,}34 \cdot 10^{3}$; г) $\frac{a_5}{a_4} = 1{,}58$.