Республиканская физическая олимпиада 2022 года
(Заключительный этап)

Теоретический тур

Решения задач
9 класс
(для жюри)

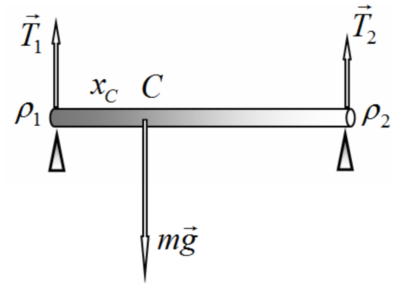
Уважаемые члены жюри!

Задачи, предложенные школьникам для решения на олимпиаде, не стандартные и достаточно сложные. Предложенные здесь варианты путей решений не являются единственно возможными. Участники олимпиады могут предложить свои способы решения. Если эти способы приводят к правильным ответам и физически обоснованы, то задача (или ее отдельные пункты) должны оцениваться максимальными баллами.

Не забывайте, что Вы должны оценивать не только конечные ответы, но и отдельные правильные шаги в ходе решения!

Не жалейте баллов (если, конечно, есть за что!) для наших замечательных школьников!

Задание 9-1. Неоднородная разминка.



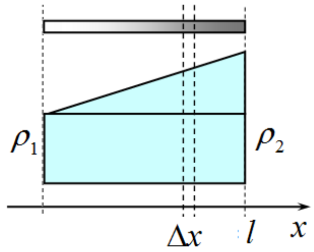
Задача 1.1

Для определения сил реакции воспользуемся условием равновесия тела: сумма моментов сил, действующих на тело, относительно произвольной точки равна нулю. Запишем это условие для точки центра масс стержня.

$$T_1 x_C = T_2 (l - x_C) \qquad (1)$$

Откуда следует, что искомое отношение сил равно:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{x_C}{l - x_C}. \qquad (2)$$



Для определения центра масс неоднородного стержня рассмотрим однородную трапецию с длинами оснований численно равными $C\rho_2$ и $C\rho_2$ и высотой l. Если мы выделим малый участок (полоску) шириной Δx, то масса этой полоски будет равна (точнее, пропорциональна) массе такого же отрезка рассматриваемого неоднородного стержня. Поэтому координаты x_C центров масс стержня и трапециевидной пластинки будут одинаковы.

Рассчитать координату центра масс пластинки можно традиционным способом.

Разобьем трапецию на прямоугольник и треугольник. Масса прямоугольника равна $m_1 = C\rho_1 l$, координата его центра масс $x_1 = \frac{l}{2}$. Масса треугольника $m_2 = \frac{C}{2}(\rho_2 - \rho_1)l$, координата его центра масс $x_2 = \frac{l}{3}$. Тогда координата центра масс трапеции задается формулой

$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{\rho_2 + 2\rho_1}{3(\rho_2 + \rho_1)} l. \qquad (3)$$

Подставляя это выражение в формулу (2), получим:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{x_C}{l - x_C} = \frac{\rho_2 + 2\rho_1}{\rho_1 + 2\rho_2}. \qquad (4)$$

Задача 1.2

Выделим на стержне маленький участок в интервале от x до $x + \Delta x$. Электрическое сопротивление этого участка равно

$$\Delta R = \rho(x)\frac{\Delta x}{S}. \qquad (1)$$

Напряжение на этом участке определяется законом Ома:

$$\Delta U = I_0 \Delta R = I_0 \rho(x)\frac{\Delta x}{S} \qquad (2)$$

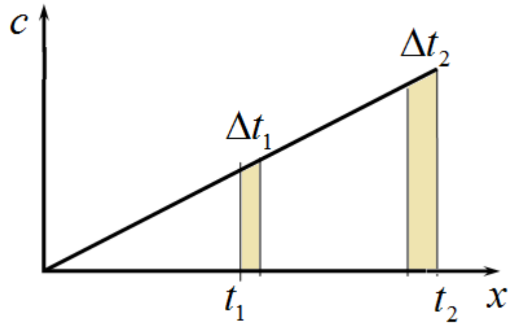
Из этой формулы следует, что зависимость удельного сопротивления от координаты может быть рассчитана по формуле:

$$\rho(x) = \frac{S}{I_0}\frac{U(x+\Delta x) - U(x)}{\Delta x} = \frac{S}{I_0}\left(a + 3bx^2\right) \qquad (3)$$

В ходе алгебраических выкладок следует пренебречь слагаемыми пропорциональными $(\Delta x)^2$ и $(\Delta x)^3$.

Задача 1.3

Построим график зависимости удельной теплоемкости стержня от координаты. Площадь под этим графиком в интервале температур Δt пропорциональна количеству теплоты, которое требуется, что бы нагреть брусок на величину Δt в том же диапазоне температур. Так как в ходе теплообмена потерь теплоты не происходит, то площади выделенных полосок должны быть равны. Легко заметить, что площадь треугольника под данным графиком в диапазоне от нуля до произвольного значения t пропорциональна t^2. Это позволяет получить уравнение для определения величины Δt_2:



$$\left(t_1 + \Delta t_1\right)^2 - t_1^2 = t_2^2 - \left(t_2 - \Delta t_2\right)^2 . \tag{1}$$

Решая это уравнение, получим:

$$\Delta t_2 = t_2 - \sqrt{t_2^2 - \left(\left(t_1 + \Delta t_1\right)^2 - t_1^2\right)} = 1{,}8°C . \tag{2}$$

Задание 2. Лунная гравитация.

Часть 1. «Идеальная» лунная гравитация.

1.1 **«Лифт»** Вес тела $\vec{P}$ – сила, с которой тело действует на опору или растягивает подвес. В отличие от силы тяжести, вес, приложенный к опоре или подвесу, зависит от состояния движения опоры или подвеса.

Рассмотрим (для определенности) брусок на горизонтальной поверхности (Рис. 1), которая может двигаться вверх или вниз с различными скоростями и ускорениями.

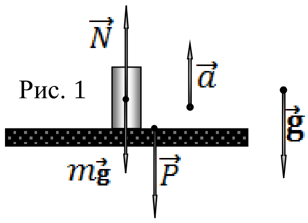


Рис. 1

При равномерном движении опоры в любом направлении вес $\vec{P}$ тела не изменится, поскольку эта система отсчета инерциальная (ИСО).

Если же опора будет иметь ускорение, направленное, например, вверх (см. Рис. 1), то вес тела увеличится (следует из второго закона Ньютона)

$$P_{\uparrow} = m(\mathbf{g} + a)\ . \qquad (1)$$

Заметим, что (1) никак не зависит от направления скорости – тело может двигаться как вверх, так и вниз, важно направление именно ускорения. Таким образом, при направлении ускорения лифта «вверх» получить состояние невесомости ($P = \mathbf{0}$) никак не получится.

При направлении ускорения лифта «вниз» ситуация меняется

$$P_{\downarrow} = m(\mathbf{g} - a)\ . \qquad (2)$$

Таким образом, для получения «лунной невесомости» ускорение $\vec{a}$ лифта должно быть направлено строго вниз. При этом его пассажиры испытают кратковременную «лунную невесомость» (не более нескольких секунд!).

1.2 **«Самолёт»** Как следует из решения пункта 1.1 при движении тела с ускорением a_1, направленным вниз, оно находится в состоянии «лунной невесомости».

Следовательно, центростремительное ускорение самолёта в верхней точке B траектории (Рис. 2) согласно (4) должно быть равно

$$\frac{v_1^2}{R} = \frac{\eta - 1}{\eta}\mathbf{g}\ , \qquad (3)$$

где v_1 – скорость самолета в точке B.

Поскольку силой сопротивления воздуха F_c и силой тяги $F_т$ двигателей в данном пункте можно пренебречь, то для расчета скорости v_1 самолета воспользуемся законом сохранения энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + m\mathbf{g}h_1 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2\mathbf{g}h_1}\ , \qquad (4)$$

где m – масса самолета. Как следует из Рис. 3, при радиусе траектории R

$$h_1 = R(1 - \cos\alpha)\ . \qquad (5)$$

В итоге:

$$\frac{v_0^2 - 2\mathbf{g}R(1 - \cos\alpha)}{R} = \frac{\eta - 1}{\eta}\mathbf{g} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{\eta v_0^2}{(\eta(3 - 2\cos\alpha) - 1)\mathbf{g}} = 2{,}35\ \text{км}\ . \qquad (6)$$

1.3 Зная радиус окружности R, найдём дальность полёта $S = AC$ по круговой траектории и высоту h_1 подъёма найдем, как проекции соответствующих радиусов на горизонталь и вертикаль

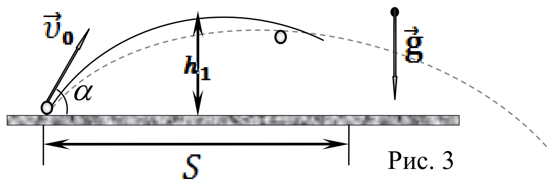


Рис. 3

$$S = 2R\sin\alpha = 1{,}66 \text{ км} . \quad (7)$$

$$h_1 = R(1-\cos\alpha) = 0{,}689 \text{ км} . \quad (8)$$

1.4 В нижней точке D траектории (см. Рис. 2) по закону сохранения энергии скорость самолёта вырастет до значения

$$\upsilon_2 = \sqrt{\upsilon_0^2 + 2gh_1} . \quad (9)$$

Следовательно, центростремительное ускорение самолета будет направлено вверх и равно
где R – радиус (6) кривизны окружности в нижней точке траектории (такой же, как и в верхней точке).

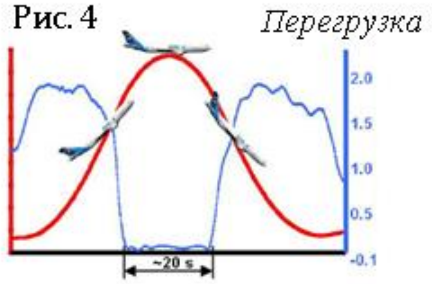
Таким образом, ответ в данном пункте принимает вид

$$\eta = \frac{a_2}{g} = 2{,}00 . \quad (10)$$

Для справки на Рис. 4 приведены показания приборов, измеряющих перегрузку внутри самолёта в реальной ситуации. Как видим из рисунка, показания самописцев в районе точки D дают для перегрузки значение

$$\eta = \frac{a_2}{g} = 2{,}00 .$$

Таким образом, наша оценка представляется вполне адекватной и реальной.

Рис. 4


Часть 2. «Реальная» лунная гравитация.

2.1 При учете силы сопротивления воздуха (т.е. в реальной ситуации) пилоты не выключают двигатели полностью, поскольку для возникновения невесомости необходимо силой тяги двигателей $F_т$ постоянно компенсировать действующую на самолёт силу сопротивления воздуха $F_c = -\beta\upsilon^2$.

Для этого (помимо высокого лётного мастерства!) необходима мгновенная мощность

$$P_д(t) = F_т \cdot \upsilon = F_c \cdot \upsilon = \beta\upsilon^3 . \quad (11)$$

Соответственно, в точках A и B мощность двигателя будет

$$P_д(A) = \beta\upsilon_0^3 . \quad (12)$$

Соответственно, искомая мощность

$$P_д(B) = \beta v_1^3 = \beta\left(v_0\sqrt{1-\frac{2\eta\ (1-\cos ⟧⟦\alpha)}{(\eta(3-2\cos\alpha)-1)}}\right)^3 \quad (13)$$

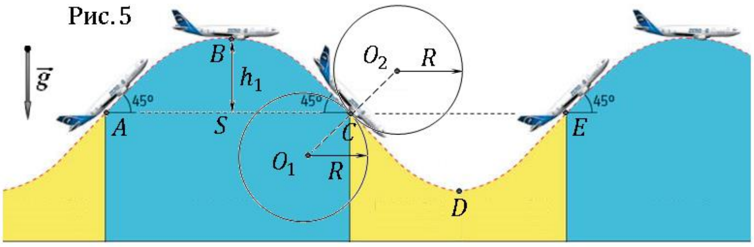
Искомое отношение мощностей

$$n = \frac{P_д(A)}{P_д(B)} = \frac{1}{\left(\sqrt{1-\frac{2\eta\ (1-\cos ⟧⟦\alpha)}{(\eta(3-2\cos\alpha)-1)}}\right)^3} = 2{,}22 \quad . \quad (14)$$

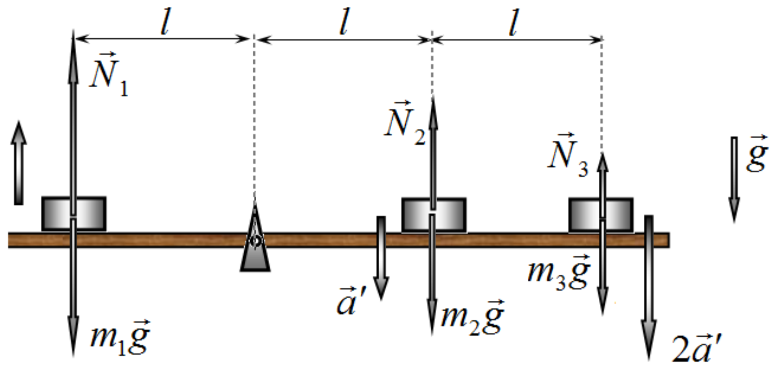
Все необходимые вычисления следует проводить с учетом правила сохранения трёх значащих цифр (столько задано в условии).

2.2 При движении вблизи точки C происходит «смена» окружностей и, соответственно, мгновенный перенос центров кривизны различных участков траекторий из точки O_1 в точку O_2 (Рис. 5). Это приводит к резкому изменению направления центростремительного ускорения на угол примерно в 180 градусов (было направление CO_1, а «через мгновение» стало CO_2).

Такое изменение действующих сил и ускорений изнутри самолёта воспринимается как действие больших сил инерции, что и «чувствуют» на себе пассажиры, перелетая от борта к борту. Данное явление, правда, в меньших масштабах, можно наблюдать при двойном повороте трамвая или троллейбуса, если внимательно проследить за синхронными «качаниями голов» сидящих пассажиров.

Рис. 5


Задание 3. Три груза.



1. Обозначим искомое ускорение груза m_1 через a. Положительным направлением этого ускорения будем считать направление «вверх». Тогда ускорение груза m_2 по модулю также равно a, но направлено вниз; ускорение груза m_3 будет равно $2a$.

Запишем уравнения 2 закона Ньютона для каждого груза

$$\begin{aligned} m_1 a &= N_1 - m_1 g \\ m_2 a &= m_2 g - N_2 \\ 2m_3 a &= m_3 g - N_3 \end{aligned} \qquad (1)$$

Так как масса доски пренебрежимо мала, то для нее справедливо уравнение (по 3 закону Ньютона, на доску действую со стороны грузов силы, равные по модулю силам реакции, действующих на грузы):

$$N_1 l = N_2 l + N_3 \cdot 2l. \qquad (2)$$

Из уравнений (1) выразим силы реакции

$$\begin{aligned} N_1 &= m_1 a + m_1 g \\ N_2 &= m_2 g - m_2 a \\ N_3 &= m_3 g - 2m_3 a \end{aligned} \qquad (3)$$

И подставим в уравнение (2)

$$m_1 a + m_1 g = m_2 g - m_2 a + 2m_3 g - 4m_3 a. \qquad (4)$$

Откуда выразим ускорение груза m_1:

$$a = \frac{m_2 + 2m_3 - m_1}{m_1 + m_2 + 4m_3} g \qquad (5)$$

Теперь обратим внимание, что ускорение груза m_3, равное

$$a_3 = 2a = 2\frac{m_2 + 2m_3 - m_1}{m_1 + m_2 + 4m_3} g \qquad (6)$$

формально может стать больше, чем ускорение свободного падения g, чего в реальности быть не может: в этом случае груз m_3 просто оторвется от доски. Это произойдет, если

$$a_3 = 2a = 2\frac{m_2 + 2m_3 - m_1}{m_1 + m_2 + 4m_3} g > g \quad \Rightarrow \quad m_2 > 3m_1 \qquad (7)$$

В этом случае доска начнет двигаться только под действием грузов m_1 и m_2. Тога система уравнений, описывающих поведение системы, будет иметь вид:
Для грузов

$$\begin{aligned} m_1 a &= N_1 - m_1 g \\ m_2 a &= m_2 g - N_2 \end{aligned} \qquad (8)$$

Для доски:

$$N_1 = N_2 . \qquad (9)$$

Из этой системы находим ускорение груза m_1:

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g . \qquad (10)$$

Таким образом, окончательная формула для ускорения имеет вид:

$$a = \begin{cases} \dfrac{m_2 + 2m_3 - m_1}{m_1 + m_2 + 4m_3} g, & m_2 < 3m_1 \\ \dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g, & m_2 \geq 3m_1 \end{cases} . \qquad (11)$$

2. Так как $m_2 > 3m_1$, то для расчета ускорения следует воспользоваться формулой (10), поэтому

$$a = \frac{7}{13} g . \qquad (12)$$