Республиканская физическая олимпиада 2022 года
(Заключительный этап)

Теоретический тур

11 класс.

1. Полный комплект состоит из трех заданий.

2. Для вашего удобства вопросы, на которые Вам необходимо ответить, помещены в рамки.

3. При оформлении работы каждое задание начинайте с новой страницы. При недостатке бумаги обращайтесь к организаторам!

3. Подписывать рабочие листы запрещается.

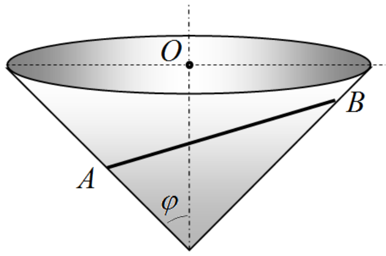
4. В ходе работы можете использовать ручки, карандаши, чертежные принадлежности, калькулятор.

5. Со всеми вопросами, связанными с условиями задач, обращайтесь к организаторам олимпиады.

Постарайтесь внимательно прочитать условия задач!
Может, вам покажется, что условия задач слишком длинные. Но мы сочинили их такими, чтобы Вам было легче решать. Поверьте, иногда решения короче таких условий! Не теряйте присутствия духа, смело беритесь за решение каждой задачи. Помните, оцениваются не только полные решения, но и их отдельные части и даже отдельные здравые мысли.

Пакет заданий содержит:
- титульный лист (1 стр.);
- условия 3 теоретических задач (5 стр.).

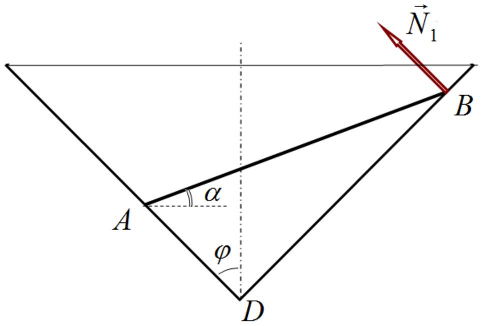
Задача 1. Иголка в коническом бокале.



В конический сосуд, ось которого вертикальна, помещен однородный массивный жесткий стержень AB массы m. Угол полураствора конуса равен $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

На следующем рисунке показано вертикальное сечение, в плоскости которого постоянно находится стержень AB. Положение стержня задается углом наклона стержня к горизонту α.

Обозначим: $\vec{N}_1$ - сила нормальной реакции, действующей на стрежень на его верхнем конце B.



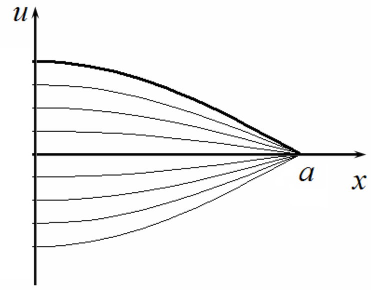
1. Определите, является ли горизонтальное положение стержня положением устойчивого равновесия при отсутствии трения между стержнем со стенками чаши.

Далее считайте, что коэффициент трения между торцами стержня и стенками сосуда равен $\mu = 0{,}15$.

2. Пусть стрежень находится в положении равновесия, располагаясь под углом α к горизонту. Определите, в каких пределах может изменяться значение модуля силы реакции $\vec{N}_1$. Постройте схематические графики зависимостей граничных значений модуля силы $\vec{N}_1$ от угла α. Укажите на этом графике область возможных значений модуля силы $\vec{N}_1$.   **3.** Рассчитайте численные значения углов α, при которых стержень может находиться внутри сосуда в положении равновесия.

Задача 2. Струна с незакрепленным концом.

В данной задаче рассматриваются малые поперечные колебания струны с одним закрепленным и одним скользящим концами. Считайте, что один конец струны может скользить без трения по направляющему стержню, расположенному перпендикулярно струне.



Основная мода (тип, форма) колебания этой струны показана на рисунке (жирная линия – форма струны в начальный момент времени, тонкие линии ее форма в другие последовательные моменты времени).

Для описания колебаний струны введем ось x, которая совпадает с положением струны в состоянии равновесия. Координата точки крепления струны a (длина струны в недеформированном состоянии равна a). Колебания струны описываются функцией $u(x,t)$ - зависимостью отклонения точки струны с координатой x от времени.

В состоянии равновесия струна натянута, сила натяжения равна T. При малых колебаниях струны изменением силы натяжения струны можно пренебречь.

Линейная плотность (масса единицы длины) струны равна ρ.

Часть 1. Бегущие и стоячие волны на струне.

В данной части рассмотрим бесконечную струну, сила натяжения которой равна T, а линейная плотность ρ. По струне пробегают гармонические волны с малой амплитудой U_0. Круговая частота этих волн ω, длина волны λ.

1.1 Запишите функции $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$, описывающие волны, распространяющиеся в положительном и отрицательном направлении оси x, соответственно.
1.2 Покажите, что при наложении этих волн возникает стоячая волна. Получите функцию $u(x,t)$, описывающую эту стоячую волну.
1.3 Выразите скорость распространения бегущих волн через характеристики волны ω и λ.

Часть 2. Колебания полузакрепленной струны.

Рассмотрим колебания закрепленной струны, показные на рисунке. Обозначим круговую частоту изображенного типа колебаний ω, в этой части вам необходимо выразить эту частоту через характеристики струны: ее длину a, силу натяжения T и линейную плотность ρ.

2.1 Запишите функцию $u(x,t)$, описывающую рассматриваемый тип колебаний струны.

Обозначим отклонение крайней подвижной точки струны от положения равновесия $u_0(t)$, а ее скорость $v_0(t)$.

2.2 Выразите кинетическую энергию $E(t)$ движения всей струны через скорость ее крайней точки $v_0(t)$.

2.3 Выразите потенциальную энергию деформации струны $W(t)$ через координату крайней точки струны $u_0(t)$.
2.4 Выразите круговую частоту рассматриваемых колебаний ω через параметры струны a, ρ, T.
2.5 Получите формулу для скорости распространения бегущих волн по бесконечной струне.

Математические подсказки.

1. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

2. $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$.

3. $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$.

4. Длина изогнутой струны, показанной на рисунке, описывается приближенной формулой

$$l = a\left(1+\frac{1}{4}\left(\frac{\pi u_0}{2a}\right)^2\right),$$

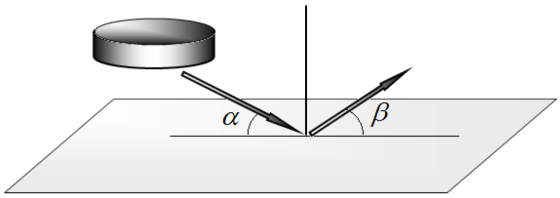
где u_0 *- отклонение центра струны.*

Задание 3. Прыгающая бомба

Прыгающая бомба – специальная авиабомба, предназначенная для разрушения плотин. Характерной особенностью бомбы является способность совершить перед окончательным погружением несколько прыжков по водной поверхности. Это, вкупе с предварительной раскруткой, позволяет бомбе вплотную приблизиться к плотине, защищенной металлическими сетями. В данной задаче попробуем разобраться, почему при некоторых условиях тело способно отскочить от воды, а не утонуть.

Часть 1. Отскок от земли

Для начала рассмотрим отражение тела от поверхности земли. Шайба дискообразной формы падает плашмя на поверхность земли.

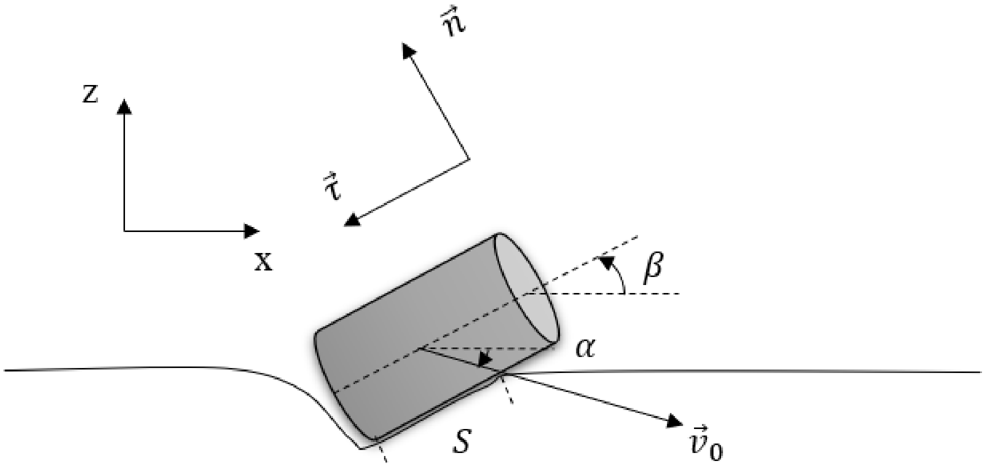


Скорость шайбы в начальный момент удара v_0 направлена под углом α к горизонту. Коэффициент трения μ. Удар абсолютно упругий (проекция скорости на вертикальную ось поменяет свой знак). Действием силы тяжести за время удара в данной части можно пренебречь.

1.1. Найдите угол β, а также скорость шайбы v после удара.

Часть 2. Отскок от воды

Бомба, имеющая цилиндрическую форму и массу M, падает на поверхность воды со скоростью v_0, направленной под углом α к горизонту. Угол между осью бомбы и горизонтом β (см. рис.).



Точное описание соударения бомбы о воду требует нахождения течений, возникающих в процессе удара, путём решения уравнения Навье-Стокса. Данная задача является достаточно трудной и может быть решена лишь численными методами. Рассмотрим упрощённую модель взаимодействия тела с водой:

- при ударе на бомбу (если она не погрузилась в воду полностью) действует сила вязкого трения, которая определяется выражением

$$F_{\text{в}} = C_n \rho v^2 S \vec{n} + C_\tau \rho v^2 S \vec{\tau},$$

где ρ – плотность воды, v – модуль скорости бомбы, S – площадь погруженной части бомбы, C_n и C_τ – безразмерные коэффициенты, имеющие одинаковый порядок величины и зависящие от углов α и β, $\vec{n}$ и $\vec{\tau}$ – единичные векторы, указанные на рисунке;

- в процессе соударения скорость бомбы и угол α меняются незначительно, а угол β не меняется вовсе;
- в силу последнего приближения величины C_n и C_τ постоянны в процессе удара;
- начала отсчёта Oz и Ox выберем в месте, где бомба начинает соприкасаться с водой;
- в силу наличия набегающих волн, обтекающих бомбу при ударе, будем считать, что площадь погруженной части бомбы линейно зависит от глубины погружения: $S = a|z|$, величину a считайте известной.

2.1. Запишите уравнение движения бомбы в проекции на оси X и Z. Упростите данные уравнения с учётом указанных приближений.
2.2. Покажите, что в любой момент времени проекции силы сопротивления воды связаны соотношением $F_{\text{в x}} = -\mu F_{\text{в z}}$. Получите выражение для коэффициента μ.
2.3. Найдите зависимость координаты нижней точки бомбы от времени $z(t)$.
2.4. Найдите время соударения бомбы с водой t_0.

Пусть масса бомбы $M = 4$ т, скорость перед ударом $v_0 = 100$ м/с, углы $\alpha = \beta = 10°$, для данных углов и формы бомбы $a = 8$ м, площадь поверхности бомбы $S_0 = 2$ м^2 (вся поверхность), коэффициенты $C_n = C_\tau = 0{,}5$, плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3. Ускорение свободного падения $g = 9{,}81\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

2.5. Для указанных параметров вычислите время соударения t_0 и расстояние l_0, пройденное бомбой вдоль оси X за время соударения.
2.6. Найдите среднюю проекции равнодействующей силы, действующей на бомбу, на ось X $\langle F_x \rangle$.
2.7. Отскочит ли бомба при указанных параметрах? Если да, то с какой конечной скоростью и под каким углом к горизонту?
2.8. Можно ли в данной модели воду считать твёрдым телом?

Подсказка.

- $\langle \sin\varphi \rangle_{\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]} = \dfrac{2}{\pi}.$