



Республиканская физическая олимпиада 2022 года (Заключительный этап)

Теоретический тур

Решения задач 11 класс (для жюри)

Уважаемые члены жюри!

Задачи, предложенные школьникам для решения на олимпиаде, не стандартные и достаточно сложные. Предложенные здесь варианты путей решений не являются единственно возможными. Участники олимпиады могут предложить свои способы решения. Если эти способы приводят к правильным ответам и физически обоснованы, то задача (или ее отдельные пункты) должны оцениваться максимальными баллами.

Не забывайте, что Вы должны оценивать не только конечные ответы, но и отдельные правильные шаги в ходе решения!



Не жалейте баллов (если, конечно, есть за что!) для наших замечательных школьников!

Задача 1. Иголka в коническом бокале.

1. Рассмотрим, как будет изменяться положение центра стержня (т.е. его центра масс) при смещении стержня. Отметим, что угол при вершине сечения конуса $\angle ADB$ - прямой.

Направим оси декартовых координат вдоль образующих конуса. Если координаты концов стержня равны $DB' = x$ и $DA' = y$, то координаты центра стержня будут равны $x_C = \frac{x}{2}$, $y_C = \frac{y}{2}$. Так как длина стержня остается неизменной, то координаты его концов удовлетворяют уравнению

$$x^2 + y^2 = l^2. \quad (1)$$

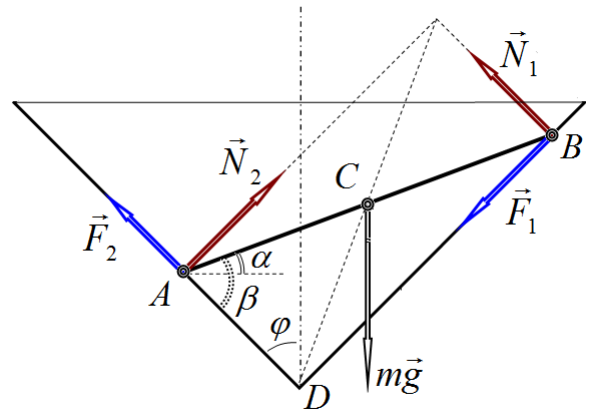
Поэтому координаты центра стержня подчиняются аналогичному уравнению

$$x_C^2 + y_C^2 = \frac{l^2}{4}, \quad (2)$$

Которое является уравнением окружности радиуса $\frac{l}{2}$ с центром в вершине конуса.

Следовательно, при смещении стержня от горизонтального положения его центр масс опускается. Иными словами, при горизонтальном положении стержня его потенциальная энергия максимальна, поэтому горизонтальное положение стержня является положением неустойчивого равновесия.

2. При отклонении стержня от горизонтального положения он стремится еще больше отклониться от этого положения. Это рассуждение позволяет определить направления сил трения \vec{F}_1 и \vec{F}_2 , действующих на концы стержня (см. рисунок). Направления сил реакции \vec{N}_1 и \vec{N}_2 однозначны: они направлены перпендикулярно стенкам сосуда. Условия равновесия стержня традиционны: векторная сумма сил, действующих на стержень, равна нулю; сумма моментов этих сил также равна нулю.



Заметим, что все силы, действующие на стержень, лежат в одной плоскости. Поэтому можно записать только два независимых уравнения для суммы проекций сил, действующих на стержень. Так как сумма сил,

действующих на стержень, равна нулю, то сумма моментов этих сил (которая равна нулю) не зависит от того, относительно какой точки рассматриваются эти силы. Поэтому можно записать только три независимых скалярных уравнения для определения действующих сил. Кроме того, в положении равновесия, когда стержень неподвижен, нельзя однозначно выразить силу трения через соответствующую силу нормальной реакции, так как в этом случае сила трения есть сила трения покоя. Поэтому связь между этими силами выражается неравенством:

$$F_{тр.} \leq \mu N. \quad (3)$$

Следовательно, все силы не определяются однозначно – их значения зависят от того, как способом стержень привели в положение равновесия. Таким образом, данная задача является недоопределенной: значения сил реакции и трения не определяются однозначно.

В такой ситуации мы можем определить только диапазоны, в которых могут лежать значения рассматриваемых сил. Для этого три из четырех неизвестных сил (две силы реакции и две силы трения) выразить через одну из них, а после этого, используя два неравенства (1) найти диапазоны изменения сил. Так как в вопросе 2, требуется определить пределы возможного изменения силы N_1 , то имеет смысл выразить остальные силы именно через модуль силы N_1 . Как следует из рисунка силы реакции и силы трения направлены под углом 45° как к вертикали, так и к горизонтали, что серьезно упрощает получение уравнений, описывающих положение равновесия, записать которых можно великое множество. Из этого множества выберем самые простые (на наш взгляд).

1) Сумма сил в проекции на вертикальную ось равна нулю:

$$(F_2 + N_2 + N_1 - F_1) \frac{\sqrt{2}}{2} = mg. \quad (4)$$

2) Сумма сил в проекции на горизонтальную ось также равна нулю:

$$-F_2 + N_2 - N_1 - F_1 = 0. \quad (5)$$

3) Рассмотрим сумму моментов сил относительно центра стержня. Стороны «прямоугольника сил», через которые легко выразить плечи сил, определяются через длину стержня $|AB| = l$:

$$\begin{aligned} |AD| &= l \cos \beta \\ |DB| &= l \sin \beta \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь угол $\beta = \angle BAD = \alpha + \frac{\pi}{4}$. Тогда нулевая сумма моментов сил относительно центра стержня выражается формулой

$$N_1 \frac{l}{2} \sin \beta - F_1 \frac{l}{2} \cos \beta - N_2 \frac{l}{2} \cos \beta - F_2 \frac{l}{2} \sin \beta = 0. \quad (7)$$

Для упрощения дальнейших выкладок удобно в качестве единицы силы выбрать величину $F_0 = \frac{mg}{\sqrt{2}}$. Тогда для сил реакции и трения можно ввести относительные единицы:

$$f_1 = \frac{F_1}{F_0}; \quad f_2 = \frac{F_2}{F_0}; \quad n_1 = \frac{N_1}{F_0}; \quad n_2 = \frac{N_2}{F_0}. \quad (8)$$

Для этих величин выполняется система уравнений, следующих из формул (4), (5), (7):

$$\begin{cases} -f_1 + f_2 + n_2 = 2 - n_1 \\ -f_1 - f_2 + n_2 = n_1 \\ f_1 + f_2 \operatorname{tg} \beta + n_2 = n_1 \operatorname{tg} \beta \end{cases} \quad (9)$$

Из этой системы уравнений следует, все силы могут быть выражены через n_1 следующим образом:

$$\begin{cases} f_1 = n_1 \operatorname{tg} \beta - \frac{\operatorname{tg} \beta + 1}{2} \\ f_2 = 1 - n_1 \\ n_2 = n_1 \operatorname{tg} \beta - \frac{\operatorname{tg} \beta - 1}{2} \end{cases} \quad (10)$$

Используем теперь неравенства, определяющие возможные значения сил трения.

На верхнем конце стержня:

$$f_1 < \mu n_1 \Rightarrow n_1 \operatorname{tg} \beta - \frac{\operatorname{tg} \beta + 1}{2} < \mu n_1. \quad (11)$$

или

$$n_1 < \frac{\operatorname{tg} \beta + 1}{2(\operatorname{tg} \beta - \mu)}. \quad (12)$$

На нижнем конце стержня:

$$f_2 < \mu n_2 \Rightarrow 1 - n_1 < \mu \left(n_1 \operatorname{tg} \beta - \frac{\operatorname{tg} \beta - 1}{2} \right). \quad (13)$$

Откуда следует, что

$$n_1 > \frac{1 + \mu \frac{\operatorname{tg} \beta - 1}{2}}{(1 + \mu \operatorname{tg} \beta)}. \quad (14)$$

Отметим, что при положительных значениях угла α $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) > 1$.

Таким образом, в положении равновесия значение модуля силы нормальной реакции \vec{N}_1 может лежать в интервале:

$$\frac{mg}{\sqrt{2}} \frac{1 + \mu \frac{\operatorname{tg} \beta - 1}{2}}{(1 + \mu \operatorname{tg} \beta)} \leq n_1 \leq \frac{mg}{\sqrt{2}} \frac{\operatorname{tg} \beta + 1}{2(\operatorname{tg} \beta - \mu)}. \quad (15)$$

На рисунке показаны графики зависимостей верхней и нижней границ возможных значений силы нормальной реакции n_1 (определяемые формулами (15)) от угла α . На этом графике выделена область возможных значений силы нормальной реакции.

Из этого рисунка следует, что существует точка пересечения графиков границ, которая и соответствует максимально возможному углу наклона стержня в положении равновесия.

3. Для определения максимального угла следует решить уравнение:

$$\frac{1 + \mu \frac{\operatorname{tg} \beta - 1}{2}}{(1 + \mu \operatorname{tg} \beta)} = \frac{\operatorname{tg} \beta + 1}{2(\operatorname{tg} \beta - \mu)} \quad (16)$$

Из этого уравнения находим:

$$\operatorname{tg} \beta^* = \frac{1 + 2\mu - \mu^2}{1 - 2\mu - \mu^2} = 1,89 \quad (17)$$

Или $\alpha = 17^\circ$. Стержень может находиться в состоянии равновесия при $\alpha < 17^\circ$.



Задача 2. Гитарная струна.

Часть 1. Бегущие и стоячие волны на струне.

1.1 Функции $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$, описывающие волны, распространяющиеся в положительном и отрицательном направлении оси x , имеют вид

$$\begin{aligned}u_1(x, t) &= U_0 \cos(\omega t - kx) \\ u_2(x, t) &= U_0 \cos(\omega t + kx),\end{aligned}\quad (1)$$

где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ - волновое число.

1.2 Результатом сложения этих волн является волна, описываемая функцией

$$u(x, t) = U_0 \cos(\omega t - kx) + U_0 \cos(\omega t + kx) = 2U_0 \cos(\omega t) \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right). \quad (2)$$

Эта функция описывает стоячую волну.

1.3 Скорость волны может быть представлена в виде

$$c = \lambda v = \frac{\lambda \omega}{2\pi}. \quad (3)$$

Часть 2. Колебания закрепленной струны.

2.1 Функция, описывающая данный тип колебаний имеет вид

$$u(x, t) = U_0 \cos(\omega t) \cos\left(\frac{\pi}{2a} x\right), \quad x \in [0, a]. \quad (4)$$

2.2 Если зависимость смещения точек струны от времени имеет вид (4), то зависимость их скоростей от времени задается функцией

$$v(x, t) = -U_0 \omega \sin(\omega t) \cos\left(\frac{\pi}{2a} x\right) = v_0 \cos\left(\frac{\pi}{2a} x\right). \quad (5)$$

Выделим на струне небольшой участок длиной Δx , положение которого определяется координатой x . Кинетическая энергия этой малой части струны равна

$$\Delta E = \frac{\rho \Delta x}{2} v^2(x) = \frac{\rho \Delta x}{2} v_0^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2a} x\right). \quad (6)$$

Кинетическая энергия всей струны рассчитывается как сумма кинетических энергий всех ее участков:

$$E = \sum_i \frac{\rho \Delta x}{2} v_0^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2a} x_i\right) = \frac{\rho v_0^2}{2} \sum_i \frac{1}{2} \left(1 + \cos\left(2 \frac{\pi}{2a} x_i\right)\right) \Delta x = \frac{\rho v_0^2}{4} a. \quad (7)$$

При вычислении суммы учтено, что сумма длин всех участков равна длине струны $\sum_i \Delta x = a$. Второе слагаемое обращается в ноль, так как в рассматриваемом интервале x косинус принимает как положительные, так и отрицательные значения.

2.3 Так как сила изменением силы натяжения струны рекомендовано пренебречь, то потенциальная энергия изогнутой струны равна работе по растяжению струны:

$$W = T\Delta l = T \cdot \quad (8)$$

Используя формулу для длины струны, приведенную в «Математической подсказке», получаем выражение для потенциальной энергии струны

$$W = T\Delta l = \frac{\pi^2 T}{16a} u_0^2. \quad (9)$$

2.4 Запишем уравнения закона сохранения механической энергии для всей струны

$$\frac{\rho a}{4} v_0^2 + \frac{\pi^2 T}{16a} u_0^2 = const. \quad (10)$$

Это уравнение есть уравнение гармонических колебаний с частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{\frac{\pi^2 T}{16a}}{\frac{\rho a}{4}}} = \frac{\pi}{2a} \sqrt{\frac{T}{\rho}}. \quad (11)$$

2.5 Рассматриваемое колебание можно рассматривать как стоячую волну, описываемую функцией (4). Сравнивая эту функцию с функцией (2), находим, что данное колебание есть сумма двух бегущих волн с длиной волны

$$\lambda = 4a. \quad (12)$$

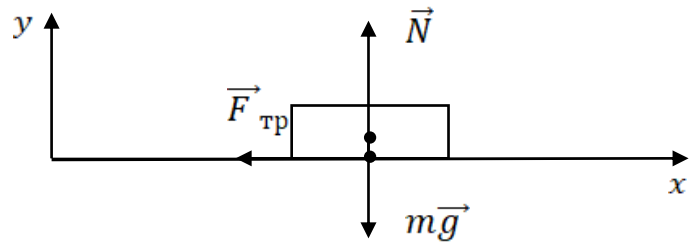
Поэтому можно использовать формулу (3) для скорости бегущей волны, в результате чего получим

$$c = \frac{\lambda \omega}{2\pi} = \frac{4a \cdot \frac{\pi}{2a} \sqrt{\frac{T}{\rho}}}{2\pi} = \sqrt{\frac{T}{\rho}}. \quad (13)$$

Задание 3. Прыгающая бомба.

Часть 1. Отскок от земли

1.1 При ударе на шайбу действуют три силы: тяжести $m\vec{g}$, нормальной реакции \vec{N} и трения $\vec{F}_{\text{тр}}$. Сила трения в данном случае является силой трения скольжения и определяется по закону Кулона-Амонтона: $F_{\text{тр}} = \mu N$.



На основании второго закона Ньютона для процесса соударения можем записать следующую систему:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta p_y}{\Delta t} &= N - mg \\ \frac{\Delta p_x}{\Delta t} &= -\mu N \end{aligned} \quad (1)$$

Учитывая упругость удара и пренебрегая импульсом силы тяжести перепишем (1) в виде

$$\begin{aligned} 2mv_0 \sin \alpha &= N\Delta t \\ m(v_0 \cos \alpha - v'_x) &= \mu N\Delta t \end{aligned} \quad (2)$$

где v' – скорость тела после удара. Избавляясь от $N\Delta t$, получим $v'_x = v_0(1 - 2\mu \sin \alpha)$. Теперь не составляет труда найти модуль конечной скорости и угол β :

$$\begin{aligned} v' &= \sqrt{v_x'^2 + v_y'^2} = v_0(1 - 2\mu \sin \alpha) \\ \beta &= \arctg\left(\frac{v'_y}{v'_x}\right) = \arctg\left(\frac{\text{tg} \alpha}{1 - 2\mu \text{tg} \alpha}\right) \end{aligned} \quad (3)$$

Отметим, что при $\mu > \frac{\text{ctg} \alpha}{2}$ шайба отскочит вертикально ($\beta = \frac{\pi}{2}$) с конечной скоростью $v' = v_0 \sin \alpha$.

Часть 2. Отскок от воды

2.1 Проекция результирующей силы на ось Z, действующей на бомбу, определяется соотношением

$$F_z = -Mg + \rho v^2 S (C_n \cos \beta - C_r \sin \beta). \quad (4)$$

Воспользуемся приближениями, указанными в условии задачи. Поскольку скорость бомбы меняется незначительно, в (4) заменим v на v_0 . Для удобства введём обозначение

$C_z = C_n \cos \beta - C_r \sin \beta$. Площадь поверхности бомбы, соприкасающаяся с водой, с учётом указанного в условии приближения, определяется уравнением

$$S = a|z|. \quad (5)$$

С учётом указанных замечаний перепишем (4) в виде (6):

$$F_z = -Mg + \rho C_z v_0^2 a |z|. \quad (6)$$

Воспользовавшись вторым законом Ньютона, получим

$$Ma_z = -Mg + \rho C_z v_0^2 a |z|. \quad (7)$$

Раскрыв модуль ($|z| = -z$) и разделив уравнение (7) на массу бомбы, получим уравнение движения

$$a_z = -g - \frac{\rho C_z v_0^2 a}{M} z. \quad (8)$$

Проекция результирующей силы на ось X, действующей на бомбу, определяется соотношением

$$F_x = -\rho v^2 S (C_n \sin \beta + C_r \cos \alpha). \quad (9)$$

Сделав пренебрежения, аналогичные п. 2.1 и введя обозначение $C_x = C_n \sin \beta + C_r \cos \beta$, пользуясь формулой (5) получим

$$Ma_x = \rho C_x v_0^2 a z. \quad (10)$$

2.2 Сравнивая проекции сил сопротивления воды в (7) и (10), получим $F_{Bx} = -\frac{C_x}{C_z} F_{Bz}$. Таким образом

$$\mu = \frac{C_x}{C_z} = \frac{C_n \sin \beta + C_r \cos \beta}{C_n \cos \beta - C_r \sin \beta}.$$

2.3 Перепишем уравнение (8) в виде

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \omega_0^2 z = -g, \quad (11)$$

где $\omega_0^2 = \frac{\rho C_z v_0^2 a}{M}$. Очевидно (11) – уравнение гармонических колебаний с циклической частотой ω_0 , при этом положение равновесия смещено относительно $z = 0$.

Будем искать решение уравнения (11) в виде (12):

$$z(t) = z_0 + A \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (12)$$

где z_0 имеет смысл координаты положения равновесия, а A – амплитуды колебаний.

Первая и вторая производные по времени от (12) имеют смысл вертикальных компонент скорости и ускорения бомбы соответственно:

$$\frac{dz}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$
$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Подставим $z(t)$ в виде (12) в уравнение (11):

$$-A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) + z_0\omega_0^2 + A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = -g,$$

откуда $z_0 = -\frac{g}{\omega_0^2}$.

Для нахождения амплитуды и начальной фазы колебаний воспользуемся начальными условиями: $z(0) = 0$, $\frac{dz}{dt}|_{t=0} = -v_0 \sin \alpha$:

$$0 = -\frac{g}{\omega_0^2} + A \cos \varphi,$$
$$-v_0 \sin \alpha = -A\omega_0 \sin \varphi$$

откуда

$$A = \frac{g}{\omega_0^2} \sqrt{1 + \frac{\omega_0^2 v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2}}$$
$$\varphi = \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega_0 v_0 \sin \alpha}{g} \right) \quad (13)$$

Окончательно

$$z(t) = -\frac{g}{\omega_0^2} + \frac{g}{\omega_0^2} \sqrt{1 + \frac{\omega_0^2 v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2}} \cos \left(\omega_0 t + \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega_0 v_0 \sin \alpha}{g} \right) \right) \quad (14)$$

2.4 Время соударения t_0 является корнем уравнения $z(t_0) = 0$. Одним из корней данного уравнения является начальный момент времени $t = 0$, при котором фаза колебаний равна начальной фазе φ . Ясно, что и в момент времени t_0 косинус в выражении (14) будет принимать то же значение, что и в начальный момент. Тогда фаза колебаний в момент времени t_0 равна $2\pi - \varphi$:

$$\omega_0 t_0 + \varphi = 2\pi - \varphi$$

Из последнего уравнения находим выражение для времени соударения:

$$t_0 = \frac{2\pi - 2\varphi}{\omega_0} \quad (15)$$

2.5 Для указанных в условии параметров $\omega_0 \approx 90,1 \text{ с}^{-1}$, $\varphi \approx 89,6^\circ$. Близость начальной фазе к 90° позволяет нам утверждать, что $z_0 \ll A$ и движение бомбы в воде происходит приблизительно половину периода колебаний, т.е.

$$t_0 \approx \frac{\pi}{\omega_0} \approx 34,9 \text{ мс.} \quad (16)$$

Расстояние l_0 с учётом малого изменения скорости бомбы находится как

$$l_0 \approx v_0 \cos \alpha t_0 \approx 3,43 \text{ м.} \quad (17)$$

2.6 Проекция результирующей силы на ось X, действующей на бомбу, определяется соотношением (10). Подставляя сюда зависимость $z(t)$ из (14), получим

$$F_x = \rho v_0^2 a C_x \left(-\frac{g}{\omega_0^2} + \frac{g}{\omega_0^2} \sqrt{1 + \frac{\omega_0^2 v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2}} \cos \left(\omega_0 t + \arctg \left(\frac{\omega_0 v_0 \sin \alpha}{g} \right) \right) \right). \quad (18)$$

Заметим, что для указанных параметров $z_0 \ll A$ и $\varphi \approx 90^\circ$, поэтому

$$F_x = -\frac{\rho g v_0^2 a C_x}{\omega_0^2} \sqrt{1 + \frac{\omega_0^2 v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2}} \sin \omega_0 t.$$

Тогда уравнение движения камня вдоль оси X с учётом выражения для ω_0 имеет вид

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{C_x}{C_z} M g \sqrt{1 + \frac{\omega_0^2 v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2}} \sin \omega_0 t. \quad (19)$$

Для вычисления средней силы воспользуемся подсказкой в условии:

$$\langle F_x \rangle = -\frac{C_x}{C_z} M g \sqrt{1 + \frac{\omega_0^2 v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2}} \langle \sin \omega_0 t \rangle_{t \in [0, \frac{\pi}{\omega_0}]} = -\frac{2C_x}{\pi C_z} M g \sqrt{1 + \frac{\omega_0^2 v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2}} \approx -5,69 \text{ МН.}$$

2.7 Бомба может не отскочить от воды по двум причинам: в процессе соударения бомба полностью опустится под воду, после чего наша модель перестает адекватно описывать процесс соударения. Бомба при этом утонет. Вторая причина – полная потеря горизонтальной компоненты импульса в процессе удара. Запишем данные условия в виде уравнений:

$$\begin{aligned} |z_{\max}| &< \frac{S_0}{a} \\ \langle F_x \rangle |t_0 &< M v_0 \cos \alpha \end{aligned} \quad (20)$$

Для параметров, приведенных в условии $|z_{\min}| = 0,19 \text{ м}$, $\frac{S_0}{a} = 0,25 \text{ м}$, $|\langle F_x \rangle| t_0 = 2,0 \cdot 10^5 \text{ кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}}$,
 $Mv_0 \cos \alpha = 3,9 \cdot 10^5 \text{ кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Таким образом, оба условия выполняются, и бомба отскакивает от воды.

Горизонтальную компоненту скорости после определяется как

$$v'_x = \frac{Mv_0 \cos \alpha + \langle F_x \rangle t_0}{M} \approx 48,5 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Поскольку вертикальная компонента скорости не меняется по модулю, нетрудно найти конечную скорость и угол отскока γ :

$$v' = \sqrt{v_x'^2 + v_y'^2} = \sqrt{v_x'^2 + (v_0 \sin \alpha)^2} \approx 51,5 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$
$$\gamma = \arctg\left(\frac{v_0 \sin \alpha}{v'_x}\right) \approx 19,7^\circ \quad (21)$$

2.8 Вычислим коэффициент μ из п. 2.2. и подставим в формулу (3), определяющую конечную скорость и угол отскока тела от твёрдой поверхности:

$$\mu = \frac{C_n \sin \beta + C_\tau \cos \beta}{C_n \cos \beta - C_\tau \sin \beta} \approx 1,43,$$

$$v' = v_0(1 - 2\mu \sin \alpha) \approx 50,3 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$
$$\gamma = \arctg\left(\frac{\text{tg} \alpha}{1 - 2\mu \text{tg} \alpha}\right) \approx 19,6^\circ \quad (22)$$

Сравнивая значения (21) и (22) можно заключить, что в данной модели вода действительно ведёт себя как твёрдое тело.