



# Республиканская физическая олимпиада 2022 года (III этап)

## Теоретический тур

### 11 класс.

1. Полный комплект состоит из трех заданий.
2. Для вашего удобства вопросы, на которые Вам необходимо ответить, помещены в рамки.
3. При оформлении работы каждое задание начинайте с новой страницы. При недостатке бумаги обращайтесь к организаторам!
3. Подписывать рабочие листы запрещается.
4. В ходе работы можете использовать ручки, карандаши, чертежные принадлежности, калькулятор.
5. Со всеми вопросами, связанными с условиями задач, обращайтесь к организаторам олимпиады.



Постарайтесь внимательно прочитать условия задач!

Может, вам покажется, что условия задач слишком длинные. Но мы сочинили их такими, чтобы Вам было легче решать. Поверьте, иногда решения короче таких условий! Не теряйте присутствия духа, смело беритесь за решение каждой задачи. Помните, оцениваются не только полные решения, но и их отдельные части и даже отдельные здравые мысли.

Пакет заданий содержит:

- титульный лист (1 стр.);
- условия 3 теоретических задач (6 стр.).

### Задание 11-1. Степенные зависимости.

Задание состоит из двух задач, связанных одной математической идеей: если некоторая величина  $Y$  зависит от величины  $x$  по степенному закону

$$Y(x) = Y_0 + ax^\gamma,$$

то скорость изменения этой величины описывается формулой, справедливой при любом показателе степени  $\gamma$  и малых значениях  $\Delta x$

$$\frac{\Delta Y}{\Delta x} = a\gamma x^{\gamma-1}.$$

#### Задача 1.1. Атмосфера с переменной температурой.

У поверхности земли атмосферное давление равно  $P_0 = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Па}$ , а температура  $T_0 = 290 \text{ К}$ . Температура воздуха убывает с высотой  $z$  по линейному закону

$$T = T_0(1 - \alpha z).$$

Температура убывает на  $\Delta T = 1,0^\circ$  при подъеме на каждые  $\Delta h = 100 \text{ м}$ . Ускорение свободного падения считать равным  $g = 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ . Молярная масса воздуха  $M = 29 \frac{\text{г}}{\text{моль}}$ .

Универсальная газовая постоянная  $R = 8,3 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ . Атмосфера неподвижна.

1.1.1 Найдите зависимость давления воздуха от высоты  $P(z)$ .

1.1.2 Рассчитайте численное значение давления воздуха на высоте  $H = 1,0 \text{ км}$ .

#### Задача 1.2. Радиоактивные шары.

Два однородных шара изготовлены из одного радиоактивного материала. Благодаря радиоактивному распаду внутри материала постоянно выделяется теплота (мощность выделения этой теплоты постоянна). Шары находятся в вакууме, поэтому потери теплоты в окружающую среду осуществляются только посредством излучения. Радиус первого шара равен  $R_1$ , температура его поверхности равна  $T_{S1} = 400 \text{ К}$ , а температура в его центре -  $T_{C1} = 500 \text{ К}$ . Радиус второго шара равен  $R_2 = 2R_1$ .

1.2.3 Рассчитайте температуры на поверхности  $T_{S2}$  и в центре  $T_{C2}$  второго шара.

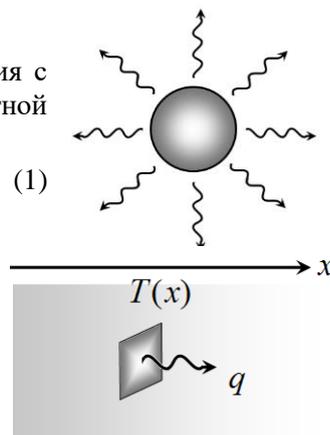
Подсказки:

1. Согласно закону Стефана – Больцмана мощность теплового излучения с единицы площади пропорциональна четвертой степени абсолютной температуры:

$$p = \sigma T^4.$$

2. Закон теплопроводности Фурье утверждает, что плотность потока теплоты (количество теплоты, перетекающей в единицу времени через площадку единичной площади) пропорционален градиенту температуры (изменению температуры на единицу длины):

$$q = -\kappa \frac{\Delta T}{\Delta x}.$$



## Задание 11-2. Магнетизм и теплота.

Однослойная обмотка длинного кругового соленоида (катушки) содержит  $N$  плотно намотанных витков. Длина соленоида равна  $l$ , его радиус равен  $r_0$  намного меньше длины соленоида.

В работе используется источник постоянного напряжения  $U_0$  (фактически это ЭДС), его внутреннее сопротивление пренебрежимо мало.

Подсказка. Если по обмотке соленоида протекает электрический ток силой  $I$ , то внутри соленоида создается однородное магнитное поле, индукция которого определяется по формуле:

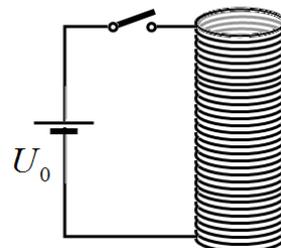
$$B = \mu_0 n I, \quad (1)$$

где  $n = \frac{N}{l}$  - число витков на единицу длины (плотность намотки).

### Часть 1. Основные понятия.

1.1 Определите индуктивность  $L$  данного соленоида.

Далее индуктивность соленоида  $L$  можно считать известной. Соленоид подключают к источнику и замыкают ключ. Пусть сопротивление обмотки соленоида равно  $R$ .



1.2 Запишите уравнение, описывающее скорость изменения силы тока в цепи со временем  $\frac{\Delta I}{\Delta t}$ .

1.3 Нарисуйте схематический график зависимости силы тока в цепи от времени.

1.4 Определите максимальное значение силы тока в цепи  $I_{\max}$ .

1.5 Оцените время установления тока в цепи  $\tau$  (время за которое сила тока в цепи достигнет постоянного значения).

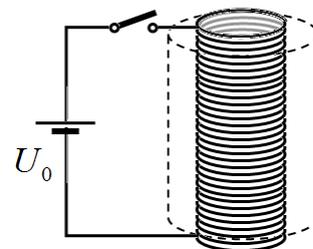
1.6 Найдите закон изменения силы тока в обмотке при замыкании ключа, если обмотка соленоида находится в сверхпроводящем состоянии.

### Часть 2. Соленоид в трубке.

Соленоид помещают внутрь алюминиевой трубки, радиус которой  $r_1$  ( $r_1 > r_0$ ). Длина трубки равна длине соленоида. Толщина стенок трубки равна  $h$  и значительно меньше ее радиуса. Оси соленоида и трубки совпадают.

Удельное электрическое сопротивление алюминия (из которого сделана трубка) равно  $\rho$ . Индуктивностью трубки в данной части следует пренебречь (т.е. можно пренебречь магнитным полем, создаваемым током, возникающим в стенках трубки).

Соленоид, находящийся в сверхпроводящем состоянии, подключают к источнику и замыкают ключ.



- 2.1 Определите силу тока  $I_1$ , возникающего в стенках трубки. Укажите направление протекания этого тока.
- 2.2 Рассчитайте мощность  $P_0$ , развиваемую источником тока. Укажите, в какой вид энергии преобразуется энергия, передаваемая источником в цепь
- 2.3 Определите мощность теплоты  $P_h$ , выделяющейся в стенках трубки.
- 2.4 Укажите источник энергии, благодаря которому трубка нагревается.

### Часть 3. Передача энергии.

В этой части Вам необходимо показать, как и откуда поступает энергия в стенки трубки.

Подсказка. Следует принять во внимание магнитное поле, создаваемое электрически током в трубке.

Обмотку соленоида (с сопротивлением  $R$ ) подключают к источнику, как показано на рисунке в Части 2, и замыкают ключ.

- 3.1 На одном рисунке (с катушкой в трубке) укажите направления тока в обмотке  $I_0$ , направление вектора индукции магнитного поля  $\vec{B}_0$ , создаваемого током в обмотке соленоида; направление тока  $I_1$  в стенках трубки, направление вектора индукции магнитного поля  $\vec{B}_1$ , создаваемого током в стенках трубки.
- 3.2 Выразите индукцию магнитного поля  $B_1$ , создаваемого током в стенках трубки, через силу тока в ее стенках  $I_1$ .
- 3.3 Запишите систему уравнений, описывающих скорости изменения сил токов в обмотке соленоида  $\frac{\Delta I_0}{\Delta t}$  и стенках трубки  $\frac{\Delta I_1}{\Delta t}$ . В эти уравнения помимо параметров установки должны входить только силы токов.
- 3.4 Получите формулу для мощности, развиваемой источником тока. Укажите, какое слагаемое описывает мощность теплоты, выделяющейся в стенках трубки. Укажите физический смысл остальных слагаемых, входящих в эту формулу.

### Задание 11-3. Шар в потоке.

Расчет сил, действующих на различные тела, движущиеся в газах и жидкостях, является чрезвычайно сложной задачей. Уравнения гидро- и аэродинамики очень сложны, их решение возможно только для простых моделей обтекания тел набегающими потоками. Так как эти проблемы имеют громадное практическое значения, то для их решения применяют различные методы и их комбинации. Одним из эффективных (и эффектных) из них является метод размерностей и подобия, который рекомендуется использовать при решении данной задачи.

#### Введение. Метод размерностей в физике.

Пусть Вам необходимо установить вид зависимости физической величины  $A$  от ряда величин  $x, y, z, \dots$

$$A = f(x, y, z, \dots). \quad (1)$$

Предположим, что эта зависимость имеет степенной вид

$$A = Cx^\alpha y^\beta z^\gamma \dots, \quad (2)$$

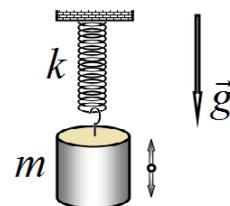
где  $C$  - безразмерный численный коэффициент. Любая физическая формула должна удовлетворять условию размерностей, т.е. размерность величины, стоящей справа, должна совпадать с размерностью величины, стоящей слева. Это условие можно записать в виде символического равенства

$$[A] = [x]^\alpha [y]^\beta [z]^\gamma \dots \quad (3)$$

Здесь и далее обозначено  $[A]$  - размерность величины  $A$ . Равенство (3) иногда позволяет получить систему уравнений для показателей степеней  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ . Для этого размерности величин следует выразить через основные единицы системы СИ и записать равенства показателей степеней для этих основных единиц. Сразу заметим, что определить значение коэффициента  $C$  в уравнении (2) этим способом не возможно, но... и с этой проблемой иногда можно побороться. Как? - что покажем дальше.

Для того, чтобы прочнее усвоить метод размерностей, решите этим методом следующую простую задачку (ответ которой Вам, конечно, известен).

Груз массы  $m$  подвешен на невесомой пружине жесткости  $k$ . Предположим, что период колебаний подвешенного груза зависит от его массы, жесткости пружины и ускорения свободного падения  $g$ . Представим эту зависимость в виде



$$T = Cm^\alpha k^\beta g^\gamma \quad (4)$$

0.1 Используя метод размерностей, запишите систему уравнений для определения показателей степеней  $\alpha, \beta, \gamma$  в формуле (4). Найдите эти показатели. Запишите формулу для периода колебаний подвешенного пружинного маятника.

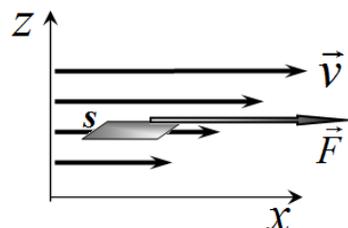
### Часть 1. «Вязкое» лобовое сопротивление.

Перейдем к основному содержанию данного задания. Рассмотрим движение шарика в жидкости или газе.

При движении тела в среде, на него действует сила сопротивления со стороны среды.

Первой основной причиной возникновения сил сопротивления является вязкость среды, обусловленная силами межмолекулярного взаимодействия между слоями движущейся жидкости или газа, и взаимодействия жидкости и поверхности тела.

При движении вязкой жидкости, когда скорость жидкости различна в различных точках, между слоями жидкости возникают силы вязкости. Простейший случай: скорость жидкости  $\vec{v}$  зависит только от одной координаты  $z$  (см. рис.), тогда сила, действующая на площадку площади  $S$  (верхний более быстрый слой «тянет» нижний), задается законом Ньютона для вязкого трения



$$F = \eta \frac{dv_x}{dz} S \quad (5)$$

где  $\eta$  - и есть вязкость (коэффициент вязкости) жидкости или газа.

Если вязкость является основной причиной возникновения силы лобового сопротивления, сила, действующая на шарик, зависит от вязкости среды  $\eta$ , радиуса шарика  $r$ , скорости его движения  $v$ . Иными словами, формула для этой силы имеет вид

$$F = C\eta^\alpha r^\beta v^\gamma. \quad (6)$$

- 1.1 Определите значения показателей степеней  $\alpha, \beta, \gamma$  в формуле (6), запишите эту формулу в явном виде.
- 1.2 Пластилиновый шарик радиуса  $r_1$  медленно опускается в глицерине с постоянной скоростью  $v_1$ . С какой скоростью  $v_2$  будет опускаться пластилиновый шарик в глицерине, если его радиус равен  $r_2 = 2r_1$ ? Считайте, что сила сопротивления определяется формулой (6).

### Часть 2. «Динамическое» сопротивление.

Второй причиной возникновения лобового сопротивления является «динамика» движения жидкости: при обтекании жидкостью тела изменяется направление и модуль скорости течения жидкости. Тем самым изменяется импульс жидкости (газа), который передается телу. Как известно, импульс, переданный в единицу времени, есть сила.

Итак, в данной модели сила определяется импульсом, переданным от среды к шарiku. Разумно предположить, что этот импульс определяется плотностью среды  $\rho$ , радиусом шарика  $r$  и его скоростью  $v$ . Поэтому формула для динамического сопротивления должна иметь вид

$$F = C\rho^\alpha r^\beta v^\gamma. \quad (7)$$

- 2.1 Определите значения показателей степеней  $\alpha, \beta, \gamma$  в формуле (7), запишите эту формулу в явном виде.
- 2.2 Дождевая капля воды радиуса  $r_1$  падает в воздухе с некоторой установившейся скоростью  $v_1$ . С какой скоростью  $v_2$  будет опускаться в воздухе капля, радиус которой в два раза больше  $r_2 = 2r_1$ ? Считайте, что сила сопротивления определяется формулой (7).

### Часть 3. Общий случай: действуют обе причины.

В общем случае сила, действующая на шарик, движущийся в вязкой среде, зависит от четырех величин: плотности среды, радиуса шарика, его скорости и вязкости среды. Представим эту зависимость в виде

$$F = C\rho^\alpha r^\beta v^\gamma \eta^\delta. \quad (8)$$

Размерности величин, входящих в эту формулу, выражается через три основных единицы: метр, секунда килограмм. А неизвестных показателей – четыре! Поэтому эти показатели не могут быть определены однозначно.

3.1 Выразите показатели степени  $\alpha, \beta, \gamma$  в формуле (8), через показатель  $\delta$ . Запишите формулу (8) в явном виде.

Представим теперь формулу (8) в виде

$$F = C(\text{Re})\rho^\alpha r^\beta v^\gamma, \quad (9)$$

Где  $C(\text{Re})$  - неизвестная функция от безразмерного параметра  $\text{Re}$ , который называется числом Рейнольдса. Эта функция не известна, но... как известно, «всякая неизвестная функция приблизительно линейна...»

3.2 Выразите безразмерное число Рейнольдса  $\text{Re}$  через параметры задачи  $\rho, r, v, \eta$ .

### Часть 4. Экспериментальные измерения.

Экспериментально измерены силы лобового сопротивления, действующие на различные шарики, движущиеся в различных средах, с различными скоростями. В Таблице 1 представлены результаты таких измерений, в ней указаны: вещество окружающей среды; вязкость этой среды  $\eta$ ; ее плотность  $\rho$ , радиус шарика  $r$ , скорость движения шарика  $v$ , измеренное значение силы лобового сопротивления  $F$ .

Таблица 1.

|                 | $\eta, \text{Па} \cdot \text{с}$ | $\rho, \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ | $r, \text{м}$       | $v, \frac{\text{м}}{\text{с}}$ | $F, \text{Н}$        |
|-----------------|----------------------------------|--------------------------------------|---------------------|--------------------------------|----------------------|
| воздух          | $1,8 \cdot 10^{-4}$              | 1,20                                 | $1,0 \cdot 10^{-3}$ | 5,0                            | $1,66 \cdot 10^{-4}$ |
| вода            | $1,14 \cdot 10^{-3}$             | $1,0 \cdot 10^3$                     | $1,0 \cdot 10^{-3}$ | 1,0                            | $2,04 \cdot 10^{-3}$ |
| оливковое масло | $8,4 \cdot 10^{-2}$              | $1,26 \cdot 10^3$                    | $1,0 \cdot 10^{-2}$ | 1,0                            | $8,45 \cdot 10^{-1}$ |
| глицерин        | 1,48                             | $0,92 \cdot 10^3$                    | $1,0 \cdot 10^{-1}$ | 10,0                           | ?                    |

4.1 Используя данные таблицы, найдите значение силы лобового сопротивления, действующую на шарик, движущийся в глицерине. Характеристики шарика и глицерина указаны в последней строке Таблицы 1.