

LXXI Белорусская математическая олимпиада школьников

**9 класс**

5. Докажите, что для любого натурального числа  $n$  существуют натуральные числа  $a$ ,  $b$  и  $c$ , такие что  $a^2 - n = xy$ ,  $b^2 - n = yz$  и  $c^2 - n = xz$ , где  $x$ ,  $y$  и  $z$  — какие-то попарно различные натуральные числа.

6. Медианы прямоугольного треугольника  $ABC$  с прямым углом при вершине  $C$  пересекаются в точке  $M$ . Из точки  $B$  провели биссектрису  $BL$  и оказалось, что  $\angle BML = 90^\circ$ .

Найдите отношение длин  $AB : BC$ .

7. Известно, что число  $(x - y)^3$  делится на  $6x^2 - 2y^2$ , где  $x$  и  $y$  — некоторые заданные целые числа.

Докажите, что и  $(x + y)^3$  делится на  $6x^2 - 2y^2$ .

8. Дано натуральное число  $n$ . *Перестановкой* называется любой упорядоченный набор, составленный из чисел  $1, 2, \dots, n$ , взятых каждое по одному разу. *Инверсией* перестановки называется количество пар  $(i, j)$  чисел таких, что  $i < j$  но  $i$ -ое по счёту число больше  $j$ -го.

Докажите, что для каждого натурального числа  $k \leq n$  существует ровно  $\frac{n!}{k}$  перестановок, в которых количество инверсий кратно  $k$ .

---

Пользоваться калькулятором не разрешается.  
Время работы: 5 часов