

LXXI Белорусская математическая олимпиада школьников

10 класс

1. Дано произвольное положительное число a . Последовательность (a_n) задана равенствами $a_1 = \frac{a}{a+1}$ и $a_{n+1} = \frac{aa_n}{a^2+a_n-aa_n}$ при всех $n \geq 1$.

Найдите наименьшее значение C , такое что неравенство

$$a_1 + a_1a_2 + a_1a_2a_3 + \dots + a_1a_2a_3 \dots a_m < C$$

выполняется при всех натуральных m , какое бы a ни было задано.

2. В треугольнике ABC длина стороны BC равна полусумме длин сторон AB и AC . Биссектриса угла $\angle BAC$ пересекает сторону BC в точке L . Окружность, которая касается прямой AL в точке L и проходит через вершину B , во второй раз пересекает прямую AB в точке X . Окружность, которая касается прямой AL в точке L и проходит через вершину C , во второй раз пересекает прямую AC в точке Y .

Найдите все возможные значения отношения $XY : BC$.

3. Даны нечётные числа x , y и z , такие что $\text{НОД}(x, y, z) = 1$. Оказалось, что сумма $x^2 + y^2 + z^2$ делится на $x + y + z$.

Докажите, что число $x + y + z - 2$ не делится на 3.

4. Квадратные трёхчлены $P(x)$ и $Q(x)$ со старшим коэффициентом единица, имеющие действительные корни, называются дружественными, если при всех $t \in [0, 1]$ квадратный трёхчлен $tP(x) + (1-t)Q(x)$ также имеет действительные корни.

а) Приведите пример квадратных трёхчленов $P(x)$ и $Q(x)$ со старшим коэффициентом единица и имеющих действительные корни, но не являющихся дружественными.

б) Докажите, что для любых двух квадратных трёхчленов $P(x)$ и $Q(x)$ со старшим коэффициентом единица, имеющих действительные корни, найдётся имеющий действительные корни квадратный трёхчлен $R(x)$ со старшим коэффициентом единица, дружественный каждому из них.