LXXI Белорусская математическая олимпиада школьников

10 класс

1. Дано произвольное положительное число a. Последовательность (a_n) задана равенствами $a_1 = \frac{a}{a+1}$ и $a_{n+1} = \frac{aa_n}{a^2+a_n-aa_n}$ при всех $n \geqslant 1$.

Найдите наименьшее значение C, такое что неравенство

$$a_1 + a_1a_2 + a_1a_2a_3 + \ldots + a_1a_2a_3\ldots a_m < C$$

выполняется при всех натуральных m, какое бы a ни было задано.

Ответ: 1.

2. В треугольнике ABC длина стороны BC равна полусумме длин сторон AB и AC. Биссектриса угла $\angle BAC$ пересекает сторону BC в точке L. Окружность, которая касается прямой AL в точке L и проходит через вершину B, во второй раз пересекает прямую AB в точке X. Окружность, которая касается прямой AL в точке L и проходит через вершину C, во второй раз пересекает прямую AC в точке Y.

Найдите все возможные значения отношения $XY : BC$.

Ответ: $3 : 4$.

3. Даны нечётные числа x, y и z, такие что НОД$(x, y, z) = 1$. Оказалось, что сумма $x^2 + y^2 + z^2$ делится на $x + y + z$.

Докажите, что число $x + y + z - 2$ не делится на 3.

4. Квадратные трёхчлены $P(x)$ и $Q(x)$ со старшим коэффициентом единица, имеющие действительные корни, называются дружественными, если при всех $t \in [0, 1]$ квадратный трёхчлен $tP(x) + (1 - t)Q(x)$ также имеет действительные корни.

а) Приведите пример квадратных трёхчленов $P(x)$ и $Q(x)$ со старшим коэффициентом единица и имеющих действительные корни, но не являющихся дружественными.

б) Докажите, что для любых двух квадратных трёхчленов $P(x)$ и $Q(x)$ со старшим коэффициентом единица, имеющих действительные корни, найдётся имеющий действительные корни квадратный трёхчлен $R(x)$ со старшим коэффициентом единица, дружественный каждому из них.

Ответ а): $P(x) = x^2 + 4x + 2$ и $Q(x) = x^2 - 4x + 2$.