МНОЖЕСТВО

(По материалам Константина Онуфриевича Ананченко)

Множество и его элементы.

Понятие множества является одним из основных в математике. Оно не определяется через другие. Поясним понятие множества на примерах.

В окружающем мире мы часто имеем дело как с отдельными, объектами (предметами), так и с их группами. Например, ученик и класс учеников, футболист и футбольная команда, картина и коллекция картин, голубь и стая голубей, лошадь и табун лошадей и т. д.

В математике набор каких-либо различных объектов, рассматриваемых как одно целое, называют множеством. Слова «класс», «команда», «коллекция», «стая», «табун» и т. д. являются в математике синонимами слова «множество».

Объекты (предметы), составляющие данное множество, называют его элементами.

В приведенных выше примерах элементами соответствующих множеств являются ученик, футболист, картина, голубь, лошадь.

Будем обозначать множества прописными буквами латинского алфавита: A, B, C, ..., M, N, ..., а их элементы— строчными буквами: a, b, c, ..., m, n, ...

Элементы множества записываются в фигурных скобках в любом порядке. Например: {13; 2; 27} и {2; 27; 13} — это одно и то же множество, состоящее из чисел 2, 13, 27. Каждый элемент записывается во множество только один раз. Например, множество букв в слове «мама» запишется:

{м, а}

Тот факт, что объект (предмет) **а** является элементом множества А, записывается **а**∈А и читается: «**а** принадлежит множеству А», или «**а** входит во множество А», «**а** — элемент множества А», «Множество А содержит элемент **а**». Запись **а**∉ А означает, что **а** не является элементом множества А. Ее читают: «**а** не принадлежит множеству А», «**а** не является элементом множества А», или «Множество А не содержит элемента а». Например, если через N обозначить множество всех натуральных чисел, то:

$$5 \in N;\ 34 \in N;\ 0{,}6 \notin N.$$

Пустое множество

Множество, которое не содержит ни одного элемента, называют **пустым** и обозначают символом Ǿ.

Например, множество натуральных чисел меньших 1 не содержит ни одного элемента, поэтому оно пустое. Примеры пустых множеств: множество букв **О** в слове «папа»; множество четных цифр в записи числа 157; множество натуральных чисел меньших 4-х, делящихся на 5.

Конечные и бесконечные множества

Конечное множество — это такое множество, количество элементов которого конечно, т. е. такое множество количество элементов которого есть натуральное число. Множество называют бесконечным, если оно не является конечным или пустым. Например, множество корней уравнения $x+28=36$, состоящее из одного числа 8 является конечным, множество букв в слове «куб» содержит 3 элемента и тоже является конечным, а множество всех натуральных чисел N и множество всех целых чисел Z— бесконечны.

Способы задания множеств

Множество считается заданным, если для каждого объекта можно точно установить, является данный объект элементом данного множества или нет.

Конечные множества можно задать перечислением всех их элементов. Например, если множество A состоит из чисел 2, 13, 27, то пишут:

$A = \{2; 13; 27\}$ и читают: «A — это множество, элементы которого — 2; 13; 27».

Конечные и бесконечные множества задают также описанием характеристического свойства его элементов, т. е. такого свойства, которым обладают элементы данного множества и не обладает ни один объект, не принадлежащий этому множеству. Рассмотрим, например, множество K натуральных чисел, меньших числа 6. В данном случае множество задано с помощью характеристического свойства «быть натуральным числом, меньшим числа 6». Легко перечислить элементы рассматриваемого множества:

$K=\{1; 2; 3; 4; 5\}$.

Множество, для элементов которого указано некоторое характеристическое свойство, может быть записано так: в фигурных скобках пишут сначала обозначение элемента, после чего проводят вертикальную черту, а затем указывают характеристическое свойство. Например, множество P натуральных чисел, больших числа 10, записывается так:

$P = \{x|\ x$ — натуральное число, $x > 10\}$.

Упражнения

1. **1.** Пусть А — множество дней недели, В — множество месяцев года, С — множество времен года. Запишите эти множества, применяя фигурные скобки.

2. Запишите множество букв в слове «математика».

3. Дано множествоА={0,2; 33; 60}. Укажите, какие записи являются верными: $33 \in N$, $60 \in N$, $0 \notin N$, $0 \notin Z$, $33 \in Z$, $60 \notin Z$, $60 \in Z$.

4. Запишите множество, в котором: а) один элемент, б) два элемента, в) бесконечное множество элементов.

5. Пусть М — множество натуральных чисел, меньших 50, делящихся на 5, но не делящихся на 2. Используя соответствующие символы, запишите, входят ли во множество М числа: 5, 10, 15, 30, 35, 40.

6. Задайте множество, перечисляя его элементы, если:

а) А — множество четных однозначных чисел;

б) В — множество двузначных чисел, делящихся на 10;

в) С—множество натуральных чисел, меньших 10.

7. Укажите характеристическое свойство элементов множества:

а) {а; е; ё; и; о; у; э; ю; я; ы};

б) {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9};

в) {11; 13; 17; 19; 23; 29}.

8. Задайте множество путем перечисления всех его элементов:

а) {p |p — простое число и 30 <p < 50};

б) {a| a $\in$N и $\frac{a}{9}$правильная дробь};

в) {b|b$\in$N и $\frac{15}{b}$натуральное число};

г) {x| x$\in$Z и 0<x<15}.

9. Сколько различных множеств можно составить из 5 различных цифр?

10. Даны множества: N, Z, A= a, d, p , C= $1,2,3,4,5$, P= $3,6,9,12,15,\dots$, D={d| d — натуральное число d<20}Среди данных множеств укажите:

а) конечные,

б) бесконечные,

в) множества, заданные путем перечисления всех элементов, г) множества, заданные с помощью характеристического свойства.

Подмножество.

Иногда приходится рассматривать не все множество, а только его часть (например, не все множество натуральных чисел, а только множество всех простых чисел). Вместо слов «часть множества» говорят «подмножество». Таким образом, подмножество — это любая часть множества. Например, множество натуральных чисел является частью множества целых чисел, поэтому множество натуральных чисел является подмножеством множества целых.

Если любой элемент множества А принадлежит также множеству В, то множество А называется подмножеством множества В.

Это записывается так: $A \subset B$, или $B \supset A$, и читается: «Множество А содержится во множестве В», или «Множество В содержит множество А». Знак $\subset$ называется знаком включения.

*Для наглядности употребляют изображения множеств на плоскости кругами, которые называют ***кругами Эйлера*** или ***диаграммами Венна.*** Тогда тот факт, что множество *A* является подмножеством множества *B,* показывают так: круг, изображающий множество *A,* находится внутри круга, изображающего множество *B* (рис. 1).

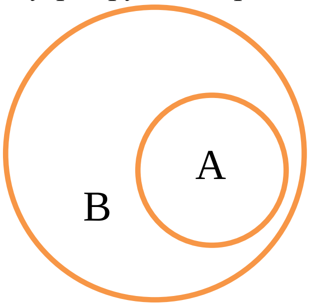


Рис.1

Если «во множестве А найдется хотя бы один элемент, не принадлежащий множеству В, то множество А не будет являться подмножеством множества В. Это записывается: $A \not\subset B$. Например, множество $A = \{0; 1; 2; 3\}$ не является подмножеством множества $B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$, так как $0 \in A$ и $0 \notin B$.

Из определения подмножества следует, что любое множество является подмножеством самого себя, т. е. справедливо утверждение $A \subset A$. Договоримся считать, что пустое множество является подмножеством любого множества А: $\varnothing \subset A$.

Таким образом, у любого непустого множества А есть, по крайней мере, два подмножества: само множество А и пустое множество $\varnothing$.

Два множества ***равны***, если они состоят из одних и тех же элементов. Если каждый элемент множества ***A*** является элементом множества ***B*** и, наоборот, каждый элемент множества ***B*** является элементом множества ***A***, то множества ***A*** и ***B*** равны. Это можно записать: ***A***=***B***. Например, даны множества ***A***=*{с; т; у; л}* и ***B***= {л; у; *т*; *с*}. Они состоят из одних и тех же элементов, записанных в разном порядке, поэтому ***A***=***B***.

Упражнения

1. Даны множества: A = {3; 5; 7; 9; 11}, B = {2; 5; 7; 9}, C = {7; 9; 1}, D= {3} и пустое множество Ǿ. Применяя знак включения, запишите, какие из этих множеств являются подмножествами множества A.

2. Дано множество P={а; б; с; й). Выпишите множество всех подмножеств множества P.

3. Даны множества:A = { p |p — простое число и 10<p <20},

B = {11; 13 }, C = {11; 13; 17; 19}, D= {19;23}.

- Задайте множество A путем перечисления всех его элементов.
- Выясните есть ли среди указанных множеств равные множества.
- Применяя знак включения, запишите, какие из множеств B, C, D являются подмножествами множества A?

4. Запишите все подмножества множества C = {12; 14; 17; 29}.

5. Дано множество A = {a|a — натуральное число a<7}.Запишите все подмножества множества A.

Операции над множествами (пересечение, объединение).

Вначале рассмотрим пример. Пусть A — множество натуральных делителей числа 30 и B — множество натуральных делителей числа 45:

A = {1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30},

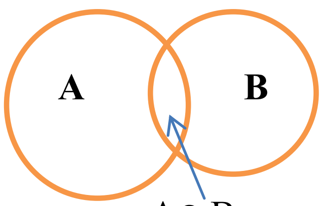
B = {1; 3; 5; 9; 15; 45}.

Множества A и B имеют общие элементы: 1, 3, 5 и 15, которые являются одновременно общими делителями чисел 30 и 45. Множество C={1; 3; 5; 15} — ***пересечение*** множеств A и B.

Пересечением множеств A и B (обозначают A∩ B) называется множество, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат одновременно каждому из них. Для нашего примера можно записать:

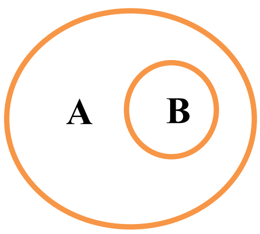
$$A \cap B = C$$

*Наглядно с помощью кругов Эйлера варианты пересечения множеств изображены на рисунках 2-4.



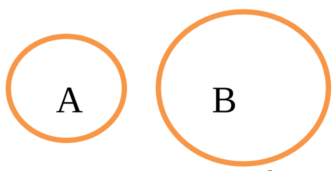
A∩ B

Рис.2



A ∩ B = B

Рис. 3



A∩ B = Ǿ

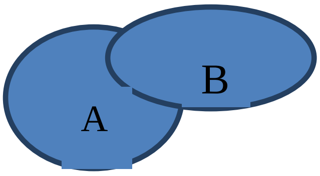
Рис. 4

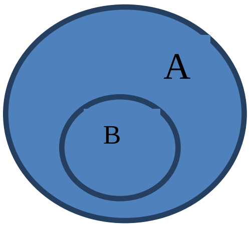
Если множества *A* и *B* не имеют общих элементов, то их называют *непересекающимися,* Непересекающиеся множества изображают при помощи кругов Эйлера так, как показано на рисунке 4.

Рассмотрим множества A = {1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30} и B = {1; 3; 5; 9; 15; 45} и построим множество C ={1;2; 3; 5; 6; 9; 10; 15; 30; 45}, которое содержит все элементы множества A и все элементы множества B и не содержит никаких других элементов. Другими словами, множество C состоит из тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству A или множеству B. Множество C={1; 2; 3; 5; 6; 9; 10; 15; 30; 45} является ***объединением*** множеств.

Объединением множеств A и B (обозначают A∪B) называется множество, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат множеству A или множеству B. Для нашего примера можно записать A∪B =C.

На рисунках 5,6,7 показано (закрашено) объединение двух множеств в случаях, когда у двух множеств есть общие элементы (ри.5), все элементы одного множества B являются элементами множества A (рис.6) и в случае, когда множества не имеют общих элементов.





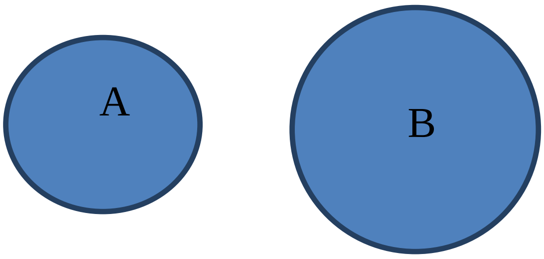


Рис 5 ***Рис 6*** ***Рис 7***

Задачи на нахождение общих элементов и всех элементов заданных множеств.

Рассмотрим несколько задач.

Задача 1. В классе 40 учащихся. В математическом кружке занимаются 32, в кружке «Умелые руки» — 21, а в обоих кружках — 15 учеников. Сколько учащихся не занимается ни в том, ни в другом кружке?

Решение. Воспользуемся кругами Эйлера. Пусть большой круг изображает множество всех учащихся класса, а два меньших круга Аи Визоб-ражают соответственно множество всех участников математического кружка и кружка «Умелые руки» (рис. 8). Общая часть кругов А и Визображает множество всех учащихся, занимающихся в обоих кружках. Из кругов Эйлера видно, что только в математическом кружке занимается 17 человек (32— 15= 17), а в кружке «Умелые руки» — 6 человек (21-15 = 6). Можно найти число учащихся, не занимающихся, ни в одном кружке: 40-17-15-6 = 40-38 = 2. Ответ: 2 ученика.

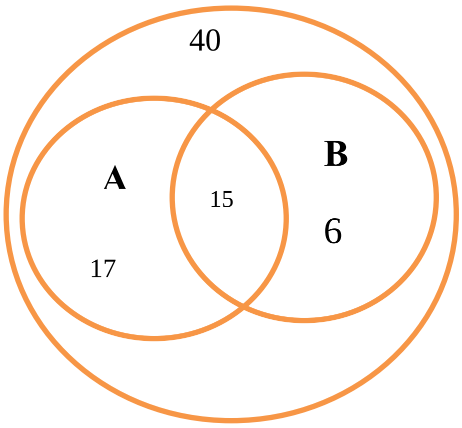


Рис 8

Задача 2. В классе 40 учащихся. Из них 26 человек играют в баскетбол, 25 — занимаются плаванием, 27 — ходят на лыжах; одновременно плаванием и баскетболом занимаются 15 человек, баскетболом и лыжами — 16, плаванием и лыжами — 18. Один учащийся освобожден от физкультурных занятий. Сколько учащихся занимается всеми видами спорта? Сколько учащихся занимается только одним видом спорта?

Решение. Пусть множество Б — множество учащихся, играющих в баскетбол, множество П— множество учащихся, занимающихся плаванием, и множество Л— множество учащихся, занимающихся лыжным спортом. По условию все эти три множества попарно пересекаются. Изобразим на рисунке 9 множество всех учащихся класса в виде прямоугольника, а кругами Эйлера — множества Б, П и Л.

Обозначим число элементов пересечения множеств Б, П и Л через x и определим число учащихся в каждой из непересекающихся областей. Так как по условию задачи в классе 40 учащихся, то можно составить уравнение:

$$26 + 25 - 15 + 27 - (34 - x) + 1 = 40, \text{ откуда } x = 10.$$

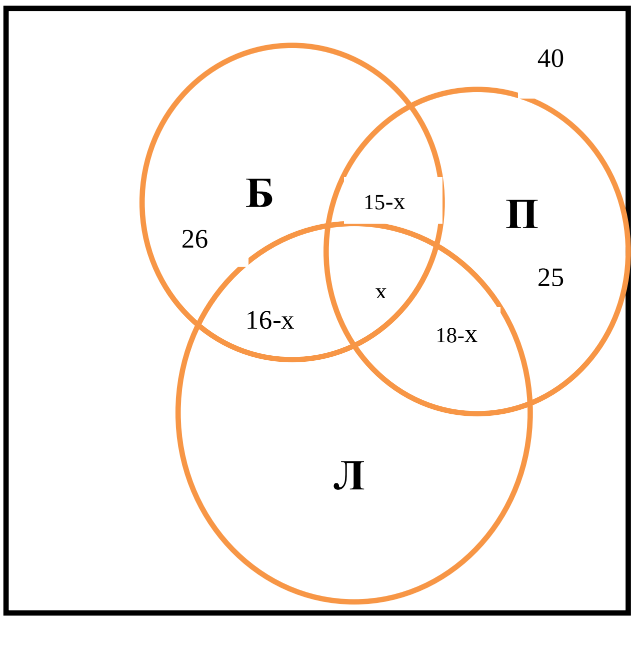


Рис 9

Упражнения

1. Пусть А — множество натуральных чисел, делящихся на 4, В — множество натуральных чисел, делящихся на 6. Найдите $A \cap B$.
2. Найдите пересечение и объединение множеств К и М, если К — множество всех двузначных натуральных чисел, не превосходящих 20, М — множество всех нечетных натуральных чисел, не превосходящих 30.
3. Пусть А — множество всех натуральных делителей числа 20, В — множество всех натуральных делителей числа 30. Верно ли:
4. а) $A \cup B = B$; б) $A \cap B = A$; в) $A \subset B$; г) $B \subset A$.

5. Какое множество является пересечением: а) множества всех натуральных чисел и множества всех целых чисел; б) множества всех четных натуральных чисел и множества всех простых чисел?

6. Начертите два треугольника так, чтобы их пересечением: а) был треугольник; б) был отрезок; в) была точка.

7. Какая фигура может получиться в пересечении треугольника и четырехугольника? Рассмотрите несколько случаев.

8. Сколько точек может оказаться в пересечении: а) прямой и окружности; б) двух окружностей?

9. В олимпиаде участвовали 54 человека. Арифметическую задачу решили 30 человек, геометрическую — 10 человек, ту и другую — 5 человек. Сколько человек: а) решили арифметическую или геометрическую задачи; б) решили арифметическую задачу и не решили геометрической задачи; в) не решили ни одной задачи?

10. В группе из 100 туристов 70 человек знают английский язык, 45 — французский язык и 23 человека знают оба языка. Сколько туристов в группе не знают ни английского, ни французского языка?

11. В классе 30 учеников. 15 детей посещают литературный кружок, 11 — биологический. Из них четверо участвуют в работе обоих кружков, пятеро занимаются в литературном и математическом кружках, а трое — в биологическом и математическом. Только один ученик посещает все три кружка. Остальные занимаются в математическом кружке. Сколько всего учащихся занимаются в математическом кружке?

12. На олимпиаде по математике председатель жюри провел опрос, чтобы узнать, кто из 40 участников решил задачи A, B и C. Результаты опроса оказались таковы: задачу A решили 25 учащихся, задачу B — 22, задачу C — 22, задачу A или B решили 35 учеников, A или C — 32, B или C — 31, все три задачи решили 10 учащихся. Сколько участников олимпиады решили только одну задачу? Сколько участников не решили ни одной из трех задач?

13. В отряде из 40 ребят 30 умеют плавать, 27 — играть в шахматы, и только пятеро не умеют ни того, ни другого. Сколько ребят умеют плавать и играть в шахматы?