Республиканская физическая олимпиада 2023 года
(Заключительный этап)

Теоретический тур

Решения задач
11 класс
(для жюри)

Уважаемые члены жюри!

Задачи, предложенные школьникам для решения на олимпиаде, не стандартные и достаточно сложные. Предложенные здесь варианты путей решений не являются единственно возможными. Участники олимпиады могут предложить свои способы решения. Если эти способы приводят к правильным ответам и физически обоснованы, то задача (или ее отдельные пункты) должны оцениваться максимальными баллами.

Не забывайте, что Вы должны оценивать не только конечные ответы, но и отдельные правильные шаги в ходе решения!

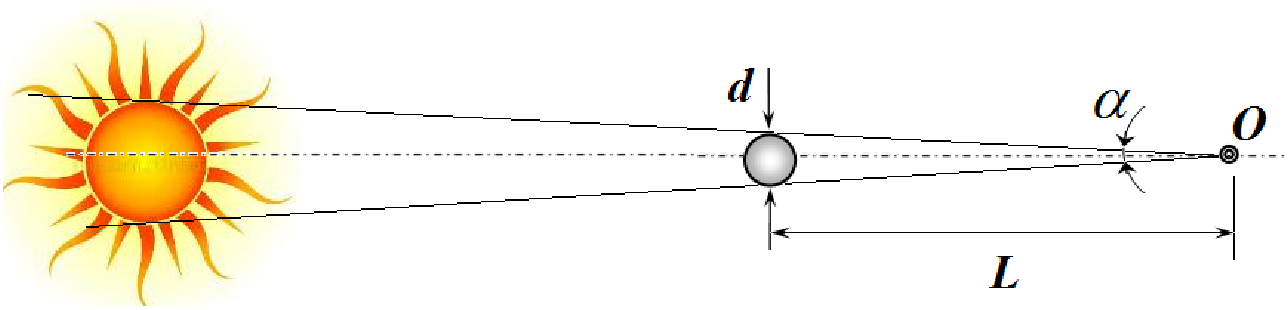
Не жалейте баллов (если, конечно, есть за что!) для наших замечательных школьников!

Задание 1. Размер Солнца. Решение.

Сначала рассчитаем угловой размер солнца в радианах

$$\alpha = 32' = \left(\frac{32}{60}\right)^{\circ} = \frac{\pi}{180}\left(\frac{32}{60}\right) рад = 9{,}3\cdot10^{-3}. \qquad (1)$$

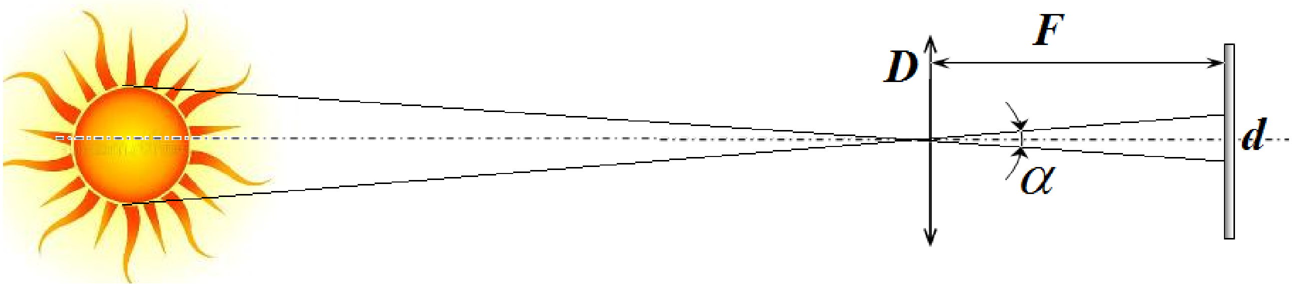
1. Рисунок показывает, как шарик может полностью зарыть диск Солнца, глаз находится в точке O.



Из рисунка следует, что

$$d = L\alpha \quad \Rightarrow \quad L = \frac{d}{\alpha} = 0{,}54 м. \qquad (2)$$

2. Как следует из рисунка



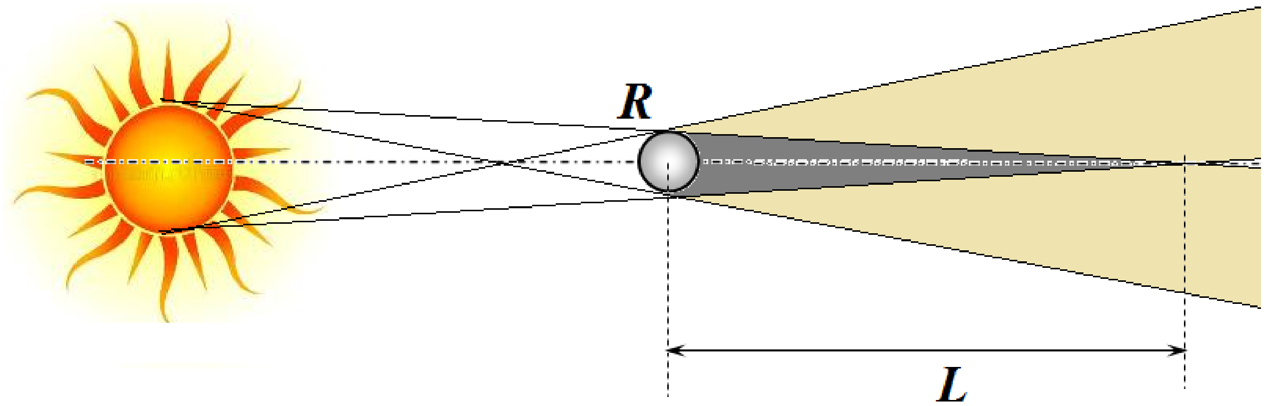
Диаметр изображения Солнца на экране равен

$$d = \alpha F. \qquad (3)$$

Поэтому энергия, попадающая на линзу в единицу времени $P = A\frac{\pi D^2}{4}$, распределяется по площади изображение $P = I\frac{\pi d^2}{4}$. Поэтому интенсивность света, падающего на изображение равна

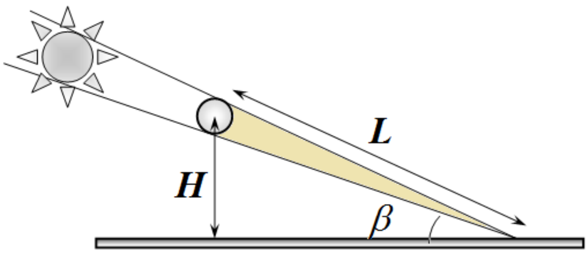
$$A\frac{\pi D^2}{4} = I\frac{\pi d^2}{4} \quad \Rightarrow \quad I = A\left(\frac{D}{d}\right)^2 = A\left(\frac{D}{\alpha F}\right)^2 = 2{,}2\cdot10^6\,\frac{Вт}{м^2}. \qquad (4)$$

3. Следующий рисунок показывает пространственные области тени и полутени, образуемые воздушным шаром.



Из рисунка следует, что длина области тени равна

$$L = \frac{2R}{\alpha}. \qquad (5)$$

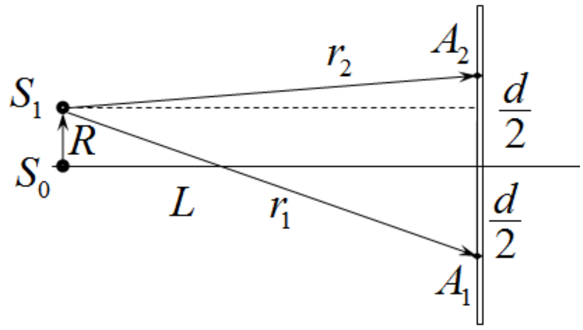


Область тени будет достигать поверхности Земли, если высота подъема шара не превысит величину

$$H = L\,tg\beta = \frac{2R}{\alpha}tg\beta \approx 620\,м. \qquad (6)$$

4. Каждую точку поверхности Солнца можно рассматривать как точечный источник света. причем излучения этих точек не является когерентным. Следовательно, каждая точка поверхности создает свою интерференционную картину. Суммарное распределение интенсивно света на экране будет равно сумме интенсивностей, создаваемых каждой точкой поверхности Солнца. При переходе от центральной точки поверхности к точкам, расположенным на краю диска Солнца, между колебаниями в отверстиях будет возникать дополнительная разность фаз, которая, в свою очередь, приведет к сдвигу интерференционной картины. Интерференционная картина исчезнет, если при переходе от точки, лежащей на одном краю диска к диаметрально противоположной точке интерференционная картина сместится ровно на одну полосу. Найдем изменение разности хода при смещении светящейся точки от центра диска к его краю.

На рисунке:



A_1, A_2 - отверстия в экране, волны из которых образуют интерференционную картину;

S_0 - точка, лежащая в центре солнечного диска;

S_1 - точка лежащая, на краю диска Солнца;

r_1, r_2 - расстояния от светящейся точки до щелей;

R - радиус Солнца; L - расстояние от Солнца до Земли.

Если рассматриваемая точка лежит в центре диска (S_0), то разность хода до щелей равна нулю. Если точка сместится на расстояние R, появится разность хода $\Delta r = r_1 - r_2$, которую можно рассчитать следующим образом. Из простых геометрических соображений можно записать

$$r_1^2 = L^2 + \left(\frac{d}{2} + R\right)^2$$
$$r_2^2 = L^2 + \left(\frac{d}{2} - R\right)^2 \qquad (7)$$

Вычтем из первого выражения второе $r_1^2 - r_2^2 = 2Rd$ и представим разность квадратов в виде $r_1^2 - r_2^2 = (r_1 - r_2)(r_1 + r_2) \approx 2L\Delta r$. Здесь учтено, $R << L$, поэтому можно считать, что сумма расстояний примерно равна удвоенному расстоянию до Солнца. Следовательно, разность хода от периферийной точки до щелей равна

$$\Delta r = \frac{Rd}{L}. \qquad (8)$$

При переходе от одного края диска к другому разность хода изменяется на величину

$$(\Delta r)_{\max} = \frac{2Rd}{L} = \alpha d. \qquad (9)$$

При таком изменении разности хода интерференционная картина смещается на

$$m = \frac{(\Delta r)_{\max}}{\lambda} = \frac{\alpha d}{\lambda} \qquad (10)$$

полос. Как было отмечено ранее, это смещение не должно превышать одной полосы, поэтому расстояние между отверстиями не должно превышать величины

$$\frac{\alpha d}{\lambda} < 1 \quad \Rightarrow \quad d < \frac{\lambda}{\alpha} = 5{,}9 \cdot 10^{-5}\,м. \qquad (11)$$

Что примерно равно 0,06 мм, поэтому получить интерференционную картину, используя в качестве источника света Солнце практически невозможно!

Задание 2. Кислород и водород – методы охлаждения (Решение).

1.1 Так как при расширении в пустоту газ работы не совершает, и теплообмен отсутствует, то внутренняя энергия остается постоянной. Поэтому

$$C_V T_0 - \frac{a}{V_0} = C_V T_1 - \frac{a}{V}. \qquad (1)$$

Из этого уравнения находим изменение температуры газа

$$T_1 - T_0 = \frac{a}{C_V}\left(\frac{1}{V} - \frac{1}{V_0}\right). \qquad (2)$$

Если газ идеальный, то $a = 0$, поэтому температура газа изменяться не будет $\Delta T = 0$. Для газа Ван-дер-Ваальса изменение температуры определяется формулой (2). Так как газ расширяется ($V > V_0$), то температура газа будет уменьшаться.

1.2 Для численного расчета изменения температуры необходимо знать объемы газов до и после расширения. Т.е. выразить объем газа через его температуру и давление. Для этого следует решить уравнение

$$P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}. \qquad (3)$$

Относительно величины V это уравнение является уравнением третьей степени, решение которого затруднительно. Оценим, можно ли при расчете объема пренебречь поправками Ван-дер-Ваальса. Так как начальное давление задано с точностью до 2 значащих цифр, то погрешность этого значения составляет величину порядка 5%. Следовательно, при расчетах допустимая погрешность также примерно равна 5%.

Рассчитаем значение объема газа, если считать его идеальным. В этом случае

$$V_0 = \frac{RT_0}{P_0} = 2{,}5 \cdot 10^{-3}\,\frac{м^3}{моль}. \qquad (4)$$

Отношение для кислорода $\frac{b}{V_0} \approx 1{,}3 \cdot 10^{-2}$ (для водорода еще меньше), поэтому поправкой b можно пренебречь. Аналогично оценим второе слагаемое в уравнении (3):

$\delta P = \frac{a}{V_0^2} \approx 2 \cdot 10^4\,Па$, относительно давления газа эта величина составляет примерно $\frac{\delta P}{P_0} \approx 0{,}02$, что также меньше допустимой погрешности расчетов, поэтому и этой поправкой можно пренебречь. После расширения численные величины поправок будут вносить еще меньший вклад, поэтому ими также можно пренебречь. Подставим формулу для объема (4) в выражение (2):

$$T_1 - T_0 = \frac{a}{C_V}\left(\frac{1}{V} - \frac{1}{V_0}\right) = \frac{a}{C_V}\left(\frac{P_1}{RT_1} - \frac{P_0}{RT_0}\right). \qquad (5)$$

В этом выражении второе слагаемое превышает первое примерно в 10 раз, поэтому изменение температуры можно оценить, пренебрегая первым слагаемым, эта оценка дает следующее значение

$$T_1 - T_0 = \frac{a}{C_V}\left(\frac{P_1}{RT_1} - \frac{P_0}{RT_0}\right) \approx -\frac{a}{C_V V_0} \approx 3K. \qquad (6)$$

Таким образом, $\dfrac{\Delta T}{T_0} \approx 0{,}01$, поэтому в левой части формулы (5) можно положить $T_1 = T_0$, тогда окончательно получим

$$T_1 - T_0 \approx \frac{a}{C_V}\left(\frac{P_1}{RT_0} - \frac{P_0}{RT_0}\right) \approx -\frac{a}{C_V RT_0}\left(P_0 - P_1\right). \qquad (7)$$

Численные расчеты дают следующие значения
Для кислорода

$$\Delta T = -2{,}4K\,; \qquad (8)$$

Для водорода

$$\Delta T = -0{,}43K\,. \qquad (9)$$

Часть 2. Дросселирование.

2.1 В соответствии с первым законом термодинамики изменение внутренней энергии газа равно разности работы, совершенной поршнем ***П1*** над газом $A_1 = P_1V_1$ и работы, совершенной газом над поршнем П2 $A_2 = P_2V_2$:

$$U_2 - U_1 = P_1V_1 - P_2V_2\,. \qquad (10)$$

После перегородки газ подчиняется уравнению состояния идеального газа, поэтому

$$\begin{matrix} P_2V_2 = RT_2 \\ U_2 = C_VT_2 \end{matrix}\,. \qquad (11)$$

Также используем выражение для внутренней энергии газа Ван-дер-Ваальса. Тогда уравнение (10) принимает вид

$$C_VT_2 - \left(C_VT_1 - \frac{a}{V_1}\right) = P_1V_1 - RT_2\,. \qquad (12)$$

Из уравнения Ван-дер-Ваальса получим

$$P_1V_1 = RT_1\frac{V_1}{V_1 - b} - \frac{a}{V_1}\,. \qquad (13)$$

И продолжим преобразования формулы (12):

$$\begin{aligned} &C_VT_2 - C_VT_1 + \frac{a}{V_1} = RT_1\frac{V_1}{V_1 - b} - \frac{a}{V_1} - RT_2 \quad \Rightarrow \\ &\left(C_V + R\right)T_2 - C_VT_1 - RT_1 = RT_1\frac{V_1}{V_1 - b} - RT_1 - \frac{2a}{V_1} \quad \Rightarrow . \\ &\left(C_V + R\right)\left(T_2 - T_1\right) = RT_1\frac{b}{V_1 - b} - \frac{2a}{V_1} \end{aligned} \qquad (14)$$

Окончательно находим требуемую формулу для изменения температуры

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{C_V + R}\left(RT_1\frac{b}{V_1 - b} - \frac{2a}{V_1}\right). \qquad (15)$$

2.2 Газ охлаждается, если $T_2 < T_1$, что выполняется, если

$$RT_1\frac{b}{V_1 - b} - \frac{2a}{V_1} < 0\,. \qquad (16)$$

Или при

$$T_1 < \frac{2a}{Rb}\left(1 - \frac{b}{V_1}\right). \qquad (17)$$

Эта температура будет максимальна, если $V_1 >> b$. В этом случае

$$T_{1\max} < \frac{2a}{Rb}. \qquad (18)$$

2.3 Подстановка численных значений дает следующие результаты

Для кислорода $T_{1\max} = 1{,}0 \cdot 10^3 K$;

Для водорода $T_{1\max} = 2{,}2 \cdot 10^2 K$.

Обратите внимание, кислород в ходе дросселирования начинает охлаждаться при комнатной температуре, для охлаждения водорода при дросселировании его предварительно необходимо охладить до температуры порядка $-100°C$.

Задание 10-2. Гемодинамика - артериальная система. Решение.

Часть 1. Предварительные расчеты.

1.1 Формулы:

1.1.1 Расход жидкости может быть выражен формулой

$$q = vS, \tag{1}$$

где $S = \pi R^2$ - площадь поперечного сечения трубы, v - средняя по поперечному сечению скорость течения, которая может быть выражена через расход жидкости, как

$$v = \frac{q}{S} = \frac{q}{\pi R^2}. \tag{2}$$

1.1.2 Очевидно, что время движения жидкости по трубе равно

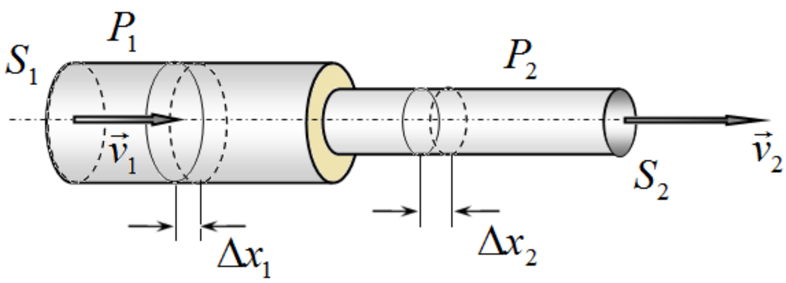
$$t = \frac{L}{v} = \frac{\pi R^2 L}{q}. \tag{3}$$

Это же выражение может быть представлено, как объем трубы, деленный на расход жидкости $t = \dfrac{V}{q}$.

1.1.3 Из формулы Пуазейля легко выразить разность давлений через расход жидкости

$$\Delta P = \frac{8\eta L}{\pi R^4} q. \tag{4}$$

1.2 Обозначим скорость течения жидкости в первой трубе v_1, во второй - v_2; площади поперечных сечений - S_1, S_2, давления в трубах P_1, P_2. Так как жидкость является идеальной, то давление изменяется скачком только в области стыка двух труб. Рассмотрим порцию жидкости, находящуюся между двумя произвольно выбранными сечениями (одно в широкой части трубы, второе в узкой части). Пусть за малый промежуток времени первое сечение сместилось на расстояние Δx_1, тогда второй сечение сместится на расстояние Δx_2. Так как жидкость несжимаема, то выполняется соотношение



$$\Delta V = S_1 \Delta x_1 = S_2 \Delta x_2. \tag{5}$$

Эта величина имеет смысл объема, протекшего через поперечное сечение трубы за рассматриваемый промежуток времени. Скорость этой порции жидкости изменилась от v_1 до v_2. Следовательно, возросла и кинетическая энергия этой порции жидкости. Изменение кинетической энергии обусловлено работой внешних сил (т.е. сил давления жидкости на выделенную порцию), поэтому можно записать:

$$P_1S_1\Delta x_1 - P_2S_2\Delta x_2 = \frac{1}{2}\rho S_1\Delta x_1\left(v_2^2 - v_1^2\right) . \qquad (6)$$

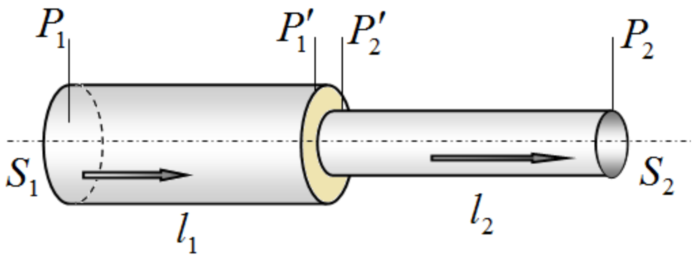
Учитывая соотношение (5), получим уравнение (которое фактически является уравнением Бернулли):

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho\left(v_2^2 - v_1^2\right) . \qquad (7)$$

Скорости течения жидкости выразим через расход жидкости $v = \frac{q}{S}$ и подставим в уравнение (7):

$$\Delta P = P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho q^2\left(\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2}\right) = \frac{1}{2\pi^2}\rho q^2\left(\frac{1}{R_2^4} - \frac{1}{R_1^4}\right) . \qquad (8)$$

1.3 При течении вязкой жидкости давление изменяется и в пределах трубы постоянного течения. Обозначим давления в различных сечениях, как показано на рисунке.



Запишем уравнения для изменения давлений на всех участках составной трубы (используя формулы (4) и (8)):

$$P_1 - P_1' = \frac{8\eta l_1}{\pi R_1^4}q$$

$$P_1' - P_2' = \frac{1}{2\pi^2}\rho q^2\left(\frac{1}{R_2^4} - \frac{1}{R_1^4}\right). \qquad (9)$$

$$P_2' - P_2 = \frac{8\eta l_2}{\pi R_2^4}q$$

И просуммируем эти выражения:

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2\pi^2}\rho q^2\left(\frac{1}{R_2^4} - \frac{1}{R_1^4}\right) + \frac{8\eta l_1}{\pi R_1^4}q + \frac{8\eta l_2}{\pi R_2^4}q . \qquad (10)$$

В результате чего получаем квадратное уравнение, правда с громоздкими коэффициентами:

$$\frac{1}{2\pi^2}\rho\left(\frac{1}{R_2^4} - \frac{1}{R_1^4}\right)q^2 + \frac{8\eta l}{\pi}\left(\frac{l_1}{R_1^4} + \frac{l_2}{R_2^4}\right)q - \Delta P = 0 . \qquad (11)$$

При решении этого уравнения следует выбрать положительный корень:

$$q = \frac{\sqrt{b^2 + a\Delta P} - b}{a} . \qquad (12)$$

где

$$a = \frac{1}{2\pi^2}\rho\left(\frac{1}{R_2^4} - \frac{1}{R_1^4}\right); \quad b = \frac{4\eta l}{\pi}\left(\frac{l_1}{R_1^4} + \frac{l_2}{R_2^4}\right).$$

1.4 При решении этой задачи можно повторить все рассуждения п.1.2, а в окончательной формуле (8) под S_2 следует понимать суммарную площадь всех присоединенных труб, поэтому

$$\delta P = P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho q^2\left(\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2}\right) = \frac{1}{2\pi^2}\rho q^2\left(\frac{1}{n^2 R_2^4} - \frac{1}{R_1^4}\right). \qquad (13)$$

Заметим, что эта разность давлений может быть отрицательной.

Часть 2. Характеристики кровотока в артериальной системе человека.

2.1.1 – 2.1.5 Для расчета требуемых характеристик следует воспользоваться уже полученными формулами, которые следует слегка модернизировать с учетом числа сосудов в каждой группе. Приведем эти формулы, необходимые для расчетов:
Расход крови через один сосуд в группе:

$$q_i = \frac{q_0}{n_i}, \qquad (14)$$

Где $q_0 = 6{,}0\frac{л}{мин} = 6{,}0\frac{10^{-3} м^3}{60 с} = 1{,}0\cdot 10^{-4}\frac{м^3}{с}$ - суммарный расход крови.

Площадь поперечного сечения сосуда в группе

$$S_i = \frac{\pi d_i^2}{4} \qquad (15)$$

Средняя скорость течения крови в сосуде:

$$v_i = \frac{q_i}{S_i}. \qquad (16)$$

Время движения через сосуд

$$t_i = \frac{l_i}{v_i}. \qquad (17)$$

Разность давлений на концах сосуда

$$\Delta P_i = \frac{8\eta l_i}{\pi R_i^4} q_i = \frac{8\pi\eta l_i}{\left(\pi R_i^2\right)^2} q_i = 8\pi\eta\frac{l_i}{S_i^2} q_i. \qquad (18)$$

Скачок давлений на стыке сосудов

$$\delta P_i = \frac{1}{2\pi^2}\rho q_i^2\left(\frac{1}{\left(\frac{n_{i+1}}{n_i}\right)^2 R_{i+2}^4} - \frac{1}{R_i^4}\right) = \frac{\rho q_0^2}{2}\left(\frac{1}{\left(n_{i+1}S_{i+1}\right)^2} - \frac{1}{\left(n_i S_i\right)^2}\right). \qquad (19)$$

Интересно отметить, что при замкнутом круге обращения (когда суммарные площади сечений в начале и конце цикла равны) сумма этих скачков давлений равна нулю.

Суммарные характеристики рассчитываются очевидным способом, как суммы соответствующих характеристик в каждой группе.

Результаты расчетов по приведенным формулам приведены в Таблице 2.

Таблица 2. Расчетные характеристики артериальной системы человека

Группа сосудов	Средняя скорость течения крови, v_i, м/с	Время движения t_i, с	Разность давлений на концах сосуда ΔP_i, Па	Скачок давления при переходе в следующую группу δP_i, Па
Аорта	0,54	1,10	180	-36
Крупные артерии	0,47	0,99	4560	-83
Мелкие артерии	0,24	0,25	7450	-29
Капилляры	0,0012	0,51	1400	-

Общее время движения крови по артериальной системе равно 2,0 с.
Разность давлений на входе и выходе из артериальной системы (сумма двух последних столбцов) равно 13 кПа, что примерно равно 100 мм рт. ст. Следует отметить, что скачки давлений в местах разветвления сосудов, во-первых, отрицательны (т.к. общая площадь поперечных сечений сосудов в каждой группе увеличивается); во-вторых, не слишком значительны.

2.2 Разумно считать, что разность давлений в венозной системе также примерно равна 100 мм рт. ст. Поэтому суммарное давление, которое должно создавать сердце, примерно в два раза превышает реальное сердечное давление. Основная причина такого существенного расхождения заключается в том, что сосуды функционируют гораздо сложнее, чем жесткие трубки. Они проходят через различные мышцы тела, которые могут способствовать лучшему протеканию крови, т.е. работают как своеобразные «микронасосы».